

# Anhang B: Lösungen

## Kapitel 1

### 1.1

- $M_1 := \{x \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq x \leq 9\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $M_2 := \{2k + 1 \in \mathbb{N}_0 : 0 < k \wedge k \leq 9 (k \in \mathbb{N}_0)\} = \{3, 5, 7, \dots, 19\}$  Bem: Die (i.A. nicht explizit erwähnte) Angabe  $k \in \mathbb{N}_0$  ist im Grunde entscheidend. Denn für  $k \in (0, 9]$  sieht diese Menge ganz anders aus:

$$\begin{aligned} M'_2 &:= \{2k + 1 \in \mathbb{N}_0 : k \in (0, 9]\} \\ &= (1, 19] \cap \mathbb{N}_0 = \{2, 3, 4, \dots, 18, 19\} \end{aligned}$$

- $M_3 := \{x \in M_1 : x < 5 \vee x \geq 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

**1.2** Es werden hier nur die jeweiligen Mengen angegeben.

- $M_1 = \{1, 2, 3\}$
- $M_2 = [0, 16]$
- $M_3 = (-2, 0)$
- $M_4 = [\frac{3}{2}, \infty)$
- $M_5 = (0, 4]$

### 1.3

- $x \in [0, \infty)$
- $x \in (-1, -\frac{1}{2})$
- $x \in (2, 3)$
- $x \in (-1, 1)$
- $x \in (0, 2)$
- $x \in (-\infty, 0]$
- Ungleichung ist für kein  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt.
- $x \in (1, \infty)$

### 1.4

- $x \in [-6, \frac{4}{3}]$
- $x \in (0, \infty)$

**1.5** 1. Fall:  $x > 0$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} < a &\Leftrightarrow 1 < ax \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} < x, \text{ für } a > 0; \text{ hieraus folgt bereits } x > 0. \\ \frac{1}{a} > x, \text{ für } a < 0; \text{ Wid., da hieraus } x < 0 \text{ folgt.} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Fall:  $x < 0$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} < a &\Leftrightarrow 1 > ax \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} > x, \text{ für } a > 0; \text{ wg. } x < 0 \text{ gilt das immer.} \\ \frac{1}{a} < x, \text{ für } a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Hieraus folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung lässt sich analog zeigen.

### 1.6

a) Die schriftliche Division von 2 durch 11 liefert:

$$\begin{array}{r} 2 : 11 = 0.18\dots \\ 20 \\ \underline{11} \\ 90 \\ \underline{88} \\ 20\dots \end{array}$$

b) Es ist  $x = 0.278 = \frac{278}{1000} = \frac{139}{500}$ . Für  $x = 0.\overline{15}$  folgt  $100 \cdot x = 15.\overline{15}$  und Subtrahieren von  $x = 0.\overline{15}$  ergibt  $99 \cdot x = 15$ . Also gilt  $x = \frac{15}{99}$ .

c) Es ist  $x_1 = \frac{7}{9} + \frac{5}{11} = \frac{77}{99} + \frac{45}{99} = \frac{122}{99}$ . Weiter ist  $x_2 = \frac{7}{9} - \frac{2}{3} = \frac{7}{9} - \frac{6}{9} = \frac{1}{9}$ . Ferner ist  $x_3 = \frac{7}{11} : \frac{3}{4} = \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{3} = \frac{28}{33}$ .

d) Es gilt  $z_1(x) = \left(\frac{x+3}{x+7}\right) : \left(\frac{x^2-9}{4}\right) = \frac{x+3}{x+7} \cdot \frac{4}{(x+3)(x-3)} = \frac{4}{(x+7)(x-3)}$  und  $z_2 = \frac{5x^2-35x}{(2x+1)(x-7)} = \frac{5x(x-7)}{(2x+1)(x-7)} = \frac{5x}{2x+1}$ .

**1.7** Es ist zweckmäßig, zuerst den Bruch im Zähler mit nur einem Bruchstrich zu schreiben:

$$\begin{aligned} C_b &= \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} + \frac{d-d_1}{\varepsilon_0 A}} \\ &= \frac{1}{\frac{d_1 + \varepsilon_r(d-d_1)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}} \quad \text{auf Hauptnenner bringen und addieren} \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d_1 + \varepsilon_r(d-d_1)} \quad \text{Kehrbruch bilden.} \end{aligned}$$

Damit ist dann:

$$\begin{aligned} \frac{C_b}{C_a} &= \frac{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d_1 + \varepsilon_r(d-d_1)}}{\varepsilon_0 \frac{A}{d}} \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d_1 + \varepsilon_r(d-d_1)} \cdot \frac{d}{\varepsilon_0 A} \quad \text{multiplizieren mit Kehrbruch} \\ &= \frac{\varepsilon_r d}{d_1 + \varepsilon_r(d-d_1)} \quad \text{multiplizieren und kürzen.} \end{aligned}$$

1.8

- a) Es ist  $x = 64^{\frac{2}{3}} = (4^3)^{\frac{2}{3}} = 4^2 = 16$  und  $y = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ .  
 b) Es gilt

$$z(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^{12}}{(x^2-1)^6}} = \frac{(x+1)^4}{(x^2-1)^2} = \frac{(x+1)^4}{(x+1)^2 \cdot (x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$$

- c) Aus  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  folgt durch Quadrieren  $T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g}$  und Multiplizieren mit  $\frac{g}{T^2}$  ergibt  $g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2}$ .  
 d) Es ist  $V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot \frac{d^3}{8} \pi = \frac{\pi}{6}d^3$ .

1.9

- a) Aus  $\frac{4}{3}r^3\pi > 1$  folgt  $r^3 > \frac{3}{4\pi}$  und  $r > \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ .  
 b) Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:  
 Fall 1:  $x \geq 7$ : Die Ungleichung lautet  $x - 7 < 5 \Rightarrow x < 12$ , also  $\mathbb{L}_1 = \{7 \leq x < 12\}$ .  
 Fall 2:  $x < 7$ : Die Ungleichung lautet  $-x + 7 < 5 \Rightarrow x > 2$ , also  $\mathbb{L}_2 = \{2 < x < 7\}$ .  
 Es ist  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{2 < x < 12\}$ .  
 c) Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:  
 Fall 1:  $6y + 3 \geq 0$  bzw.  $y \geq -\frac{1}{2}$ : Die Ungleichung lautet  $6y + 3 > 5 \Rightarrow y > \frac{1}{3}$ , also  $\mathbb{L}_1 = \{y > \frac{1}{3}\}$ .  
 Fall 2:  $y < -\frac{1}{2}$ : Die Ungleichung lautet  $-6y - 3 > 5 \Rightarrow 6y < -8 \Rightarrow y < -\frac{4}{3}$ , also  $\mathbb{L}_2 = \{y < -\frac{4}{3}\}$ .  
 Es ist  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{y : y > \frac{1}{3} \text{ oder } y < -\frac{4}{3}\}$ .

1.10

- a) Es ist  $\log_7(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(7)} = 1.1833 \dots$   
 b) Aus  $\lg((4x)^2) = 5$  folgt  $2\lg(4x) = 5 \Rightarrow \lg(4x) = \frac{5}{2} \Rightarrow 4x = 10^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{10^{\frac{5}{2}}}{4} = 79.06$ .  
 c) Aus  $y = e^{f(x)} = x^{x^2}$  folgt durch Logarithmieren  $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ .

1.11

- a)  $\sqrt{x+1} = x$ . Da  $\sqrt{\dots} \geq 0$  ist, muss  $x \geq 0$  sein. Quadrieren ergibt  $x+1 = x^2$  bzw.  $x^2 - x - 1 = 0$ . Die  $p/q$ -Formel liefert  $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Wegen  $x \geq 0$  folgt  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .  
 b)  $x - 2 = \sqrt{x}$ . Da  $\sqrt{\dots} \geq 0$  ist, muss  $x \geq 2$  sein. Quadrieren ergibt  $x^2 - 4x + 4 = x$  bzw.  $x^2 - 5x + 4 = 0$ . Die  $p/q$ -Formel liefert  $x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} = 4, 1$ . Wegen  $x \geq 2$  scheidet  $x = 1$  aus und es verbleibt  $x = 4$  als Lösung.  
 c)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = 2$ . Quadrieren ergibt  $x - 1 + x + 1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = 4$  bzw.  $2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = 4 - 2x$  oder nach Kürzen  $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = 2 - x$ . Nochmals Quadrieren ergibt  $(x-1) \cdot (x+1) = 4 - 4x + x^2$  bzw.  $x^2 - 1 = 4 - 4x + x^2$  oder  $4x = 5$ , also  $x = \frac{5}{4}$ . Durch Einsetzen bestätigt man die Lösung.

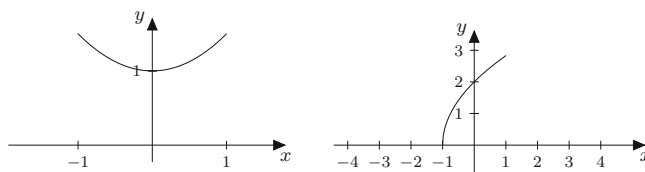


Abb. B.1 Die Funktionen aus Aufgabe 2.3 a) links und b) rechts

1.12

- a)  $\log_{10}(x) = \frac{5}{2}$  bedeutet  $10^{5/2} = x$ , also  $x = 316.227 \dots$   
 b)  $4^{2x} = 64$ . Anwendung des  $\ln$  auf beiden Seiten liefert  $\ln(4^{2x}) = \ln(64) \Rightarrow 2x \cdot \ln(4) = \ln(64)$  also  $x = \frac{\ln(64)}{2\ln(4)} = \frac{3}{2}$   
 c)  $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ . Substitution  $z = e^x$  liefert die quadratische Gleichung  $z^2 - 2z - 3 = 0$  mit den Lösungen  $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = 3, -1$ . Wegen  $z = e^x \geq 0$  scheidet  $-1$  aus. Also  $z = e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3) = 1.0986 \dots$

## Kapitel 2

2.1

- a) Die Funktionsvorschrift lautet  $f_1(x) = 35 \cdot x$ .  $f_1(x)$  ordnet der Anzahl von Tagen  $x$  die Menge an verbrauchtem Heizöl (in Litern) zu.  
 b) Die Funktionsvorschrift lautet  $f_2(x) = 0.8 \cdot x$ .  $f_2(x)$  ordnet der Menge  $x$  an Heizöl (in Litern) die Kosten in Euro zu.  
 c) Die Verkettung von  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  lautet  $g(x) = f_1(f_2(x)) = 35 \cdot (0.8 \cdot x) = 28 \cdot x$ .  $g(x)$  ordnet der Anzahl von Tagen  $x$  die Heizkosten in Euro zu.

- 2.2 Die Verkettung der Funktionen  $y = g(x) = \frac{1+x}{1-2x}$  mit  $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$  und  $y = f(x) = x^2 + 4$  mit  $D(f) = \mathbb{R}$  und  $W(f) = [4, \infty)$  ist gegeben durch

$$y = h(x) := g(f(x)) = g(x^2 + 4) = \frac{1 + (x^2 + 4)}{1 - 2(x^2 + 4)} = \frac{x^2 + 5}{-2x^2 + 7} = -\frac{x^2 + 5}{2x^2 + 7} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{x^2 + \frac{7}{2}}$$

mit  $D(h) = \mathbb{R}$  und  $W(h) = [-\frac{5}{7}, -\frac{1}{2})$ .

2.3

- a) Das Schaubild finden Sie in Abb. B.1, links. Man muss die Normalparabel  $y = x^2$  mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  multiplizieren (stauen) und danach um  $y = 1$  nach oben verschieben.  
 b) Das Schaubild finden Sie in Abb. B.1, rechts. Man muss die Wurzel  $y = \sqrt{x}$  mit dem Faktor 2 multiplizieren (strecken) und danach um 1 nach links verschieben.

2.4

a) Die Funktion ist für  $x \in \mathbb{R}$  definiert, d. h.  $D = \mathbb{R}$ . Für ein beliebiges  $x \in D$  gilt

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 3(-x)^4 = 2x^2 + 3x^4 = f(x),$$

d. h. die Funktion  $y = f(x)$  ist in  $D$  gerade bzw. symmetrisch zur  $y$ -Achse.

b) Der Definitionsbereich der Funktion ist durch die Werte der Variablen  $x$  bestimmt, für die keine negativen Radikanden der Wurzeln auftreten. Für  $x \in [0, 1]$  gilt  $1 + x > 0$  und  $1 - x \geq 0$ , d. h. die Radikanden sind positiv und  $D = [0, 1]$  ist der Definitionsbereich. Damit gilt für  $x \in D$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{1 + (-x)} - \sqrt{1 - (-x)} \\ &= \sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x} = -f(x), \end{aligned}$$

d. h. die Funktion ist ungerade bzw. symmetrisch zum Ursprung.

c) Es ist  $D(f) = \mathbb{R}$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^7 - (-x)^3 = (-1)^7 x^7 - (-1)^3 x^3 \\ &= -(x^7 - x^3) = -f(x), \end{aligned}$$

also ist  $f$  ungerade.

d) Es ist  $D(f) = \mathbb{R}$ . Weiter gilt

$$f(-x) = 1 + 3(-x)^2 = 1 + 3x^2 = f(x),$$

also ist  $f$  gerade.

2.5

a) Das Polynom  $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$  hat die Nullstelle  $x_0 = 0$ . Es gilt  $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x \cdot (x^2 - 3x + 2)$ .  $x^2 - 3x + 2$  hat die Nullstellen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 2$  (quadratische Gleichung). Es folgt  $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$ .

b) Das Polynom  $P_4(x) = x^4 + x^2 - 2$  besitzt die Nullstellen  $x_0 = 1$  und  $x_1 = -1$ . Polynomdivision  $\frac{P_4(x)}{(x-1)(x+1)}$  liefert  $P_4(x) = x^4 + x^2 - 2 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 2)$ . Wegen  $x^2 + 2 > 0$  gibt es keine weiteren Nullstellen.

c) Das Polynom  $P_4(x) = x^4 - 1$  besitzt die Nullstellen  $x_0 = 1$  und  $x_1 = -1$ . Die Polynomdivision  $\frac{P_4(x)}{(x-1)(x+1)}$  liefert  $P_4(x) = x^4 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$ . Wegen  $x^2 + 1 > 0$  gibt es keine weiteren Nullstellen.

2.6

a) Für  $R(x) = \frac{x - 4}{x \cdot (x - 2)}$  sind die Stellen  $x_0 = 0$  und  $x_1 = 2$  Polstellen, jeweils mit Vorzeichenwechsel.

b) Für  $R(x) = \frac{1}{2} \frac{x + 3}{x^2 + 2x}$  sind die Stellen  $x_0 = 0$  und  $x_1 = -2$  kritisch. Wegen  $R(x) = \frac{1}{2} \frac{x + 3}{x^2 + 2x} = \frac{x + 3}{2} \frac{1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x}$  sind sowohl  $x_0 = 0$  als auch  $x_1 = -2$  Polstellen mit Vorzeichenwechsel.

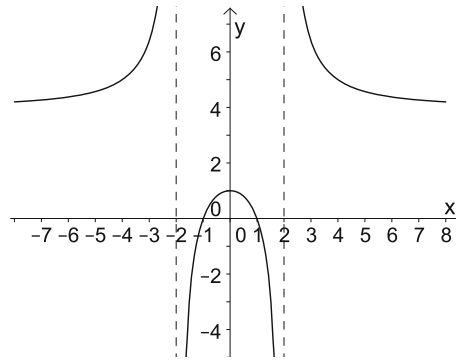


Abb. B.2 Die Funktion  $R(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2 - 4}$  aus Aufgabe 2.7

2.7 Die Bedingung für die Nullstelle liefert die Gleichung  $b \cdot 1^2 - 4 \doteq 0 \Rightarrow b = 4$ . Mit der Zerlegung des Nenners  $x^2 - a = (x - \sqrt{a}) \cdot (x + \sqrt{a})$  und der Bedingung für den Pol in  $x = 2$  folgt für  $a$  die Gleichung  $2 - \sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2$ , d. h.  $a = 4$ .

Wir erhalten

$$R(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2 - 4}.$$

Durch die Faktorisierung des Zählers (Polynomdivision)  $4x^2 - 4 : (x - 1) = 4x + 4$  folgt eine weitere Nullstelle bei  $x = -1$ . Mit der Faktorisierung des Nenners  $(x + 2) \cdot (x - 2)$  erhalten wir einen weiteren Pol bei  $x = -2$  (Abb. B.2).

2.8 Mit den Additionstheoremen des Sinus  $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)$  und Kosinus  $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$  sowie mit dem trigonometrischen Pythagoras  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  erhält man:

a)

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 \sin^2(x) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x) \cos(x) - \sin(2x) \sin(x) \\ &= (1 - 2 \sin^2(x)) \cos(x) - 2 \sin(x) \cos(x) \cdot \sin(x) \\ &= \cos(x) - 4 \sin^2(x) \cos(x) \\ &= \cos(x) - 4(1 - \cos^2(x)) \cos(x) \\ &= 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x) \end{aligned}$$

2.9

a) Für  $y = f(x) = 3 \sin(4x - 2) = 3 \sin(4(x - \frac{1}{2}))$  ist die Amplitude  $a = 3$ , die Periode  $p = \frac{\pi}{2}$ , die Verschiebung (Nulldurchgang)  $x_0 = \frac{1}{2}$  und die Phase  $\varphi = -2$ .

b) Für  $y = f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  ist die Amplitude  $a = \frac{1}{2}$ , die Periode  $p = \pi$ , die Verschiebung (Nulldurchgang)  $x_0 = 0$  und die Phase  $\varphi = 0$ .

**2.10**

a) Mit  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  und  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4} ((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2) \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})) = 1. \end{aligned}$$

b) Das Additionstheorem für den Hyperbelsinus lautet:

$$\begin{aligned} &\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y) \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} \\ &= \sinh(x+y) \end{aligned}$$

**2.11** Aus  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  folgt mit  $w = e^x$  die Gleichung  $2y = w - w^{-1}$  und Multiplikation mit  $w > 0$  liefert die quadratische Gleichung  $w^2 - 2wy - 1 = 0$  mit der Lösung

$$w_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Wegen  $w > 0$  und  $\sqrt{y^2 + 1} > y$  scheidet das Minuszeichen aus. Also gilt:

$$w = e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Die Auflösung nach  $x$  liefert  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$  und Umbenennen ergibt:

$$y = \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

**2.12** Für die Funktion  $y = f(x) = |x + 3| - |x - 2|$  gilt:

i)  $x < -3$ : Hier sind in beiden Beträgen die Argumente negativ und es gilt:

$$y = f(x) = |x+3| - |x-2| = -(x+3) - (-1) \cdot (x-2) = -5$$

ii)  $-3 \leq x \leq 2$ : hier ist das Argument in  $|x - 2|$  negativ (oder 0) und das Argument in  $|x + 3|$  ist positiv (oder 0). Es gilt:

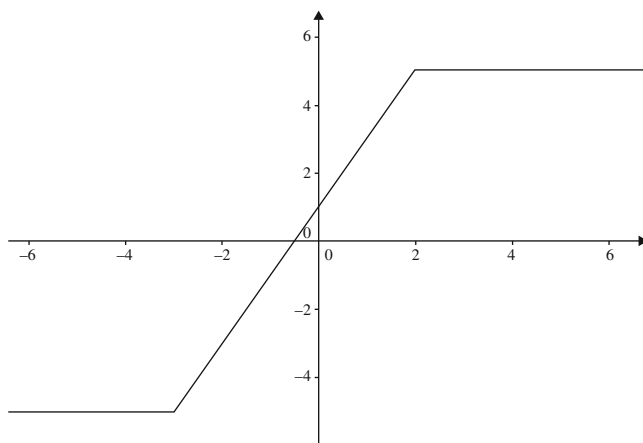
$$y = f(x) = |x+3| - |x-2| = (x+3) - (-1) \cdot (x-2) = 2x+1$$

iii)  $x > 2$ : Hier sind in beiden Beträgen die Argumente positiv und es gilt:

$$y = f(x) = |x+3| - |x-2| = (x+3) - (x-2) = 5$$

Wir erhalten also (vgl. Abb. B.3):

$$y = f(x) = \begin{cases} -5, & x < -3 \\ 2x + 1, & -3 \leq x \leq 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$



**Abb. B.3** Die Funktion  $y = f(x) = |x + 3| - |x - 2|$  aus Aufgabe 2.12

**2.13**

a) Wegen  $e^{\dots} > 0$  sind die Nullstellen von  $y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin(2t) = 0$  bestimmt durch  $\sin(2t) = 0$ . Wegen  $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_k = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ , folgt  $t_k = \frac{k}{2} \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ .

b)  $\sin^2(x) - 2 \sin(x) - 1 = 0$ . Substitution  $z = \sin(x)$  liefert die quadratische Gleichung  $z^2 - 2z - 1 = 0$  mit den Lösungen  $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$ . Wegen  $z = \sin(x)$  gilt  $|z| \leq 1$  und somit  $z = 1 - \sqrt{2}$ . Es folgt  $x = \arcsin(1 - \sqrt{2})$  und wegen der Mehrdeutigkeit erhalten wir die Lösungen  $x_{1,k} = \arcsin(1 - \sqrt{2}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Aus Symmetriegründen sind auch die  $x_{2,k} = \pi - x_{1,k}, k \in \mathbb{Z}$ , Lösungen der Gleichung. Da quadriert wurde, sind die Lösungen durch Einsetzen zu prüfen. Aufgrund der  $2\pi$ -Periode reicht jeweils ein Wert:  $\sin^2(x_{1,0}) - 2 \sin(x_{1,0}) - 1 = (1 - \sqrt{2})^2 - 2(1 - \sqrt{2}) - 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 2 + 2\sqrt{2} - 1 = 0$ . Also sind die  $x_{1,k}$  tatsächlich Lösungen der Gleichung. Entsprechend gilt  $\sin^2(x_{2,0}) - 2 \sin(x_{2,0}) - 1 = \sin^2(3.5687) - 2 \sin(3.5687) - 1 = 0$ . Also sind die  $x_{2,k}$  ebenfalls Lösungen. Abb. B.4, links, zeigt die Lösungen im Intervall  $[0, 2\pi]$ : Der Punkt A entspricht  $x_{2,0} = \pi - x_{1,0}$  und B entspricht  $x_{1,1}$ .

c) Die Vereinheitlichung von  $\sin(x) + 2 \cos(x) = 1$  zu  $\sin(x)$  liefert  $\sin(x) + 2\sqrt{1 - \sin^2(x)} = 1$  bzw.  $\sin(x) - 1 = -2\sqrt{1 - \sin^2(x)}$ . Quadrieren ergibt  $\sin^2(x) - 2 \sin(x) + 1 = 4(1 - \sin^2(x))$  bzw.  $5 \sin^2(x) - 2 \sin(x) - 3 = 0$  oder normiert  $\sin^2(x) - \frac{2}{5} \sin(x) - \frac{3}{5} = 0$ . Substitution  $z = \sin(x)$  ergibt die quadratische Gleichung  $z^2 - \frac{2}{5}z - \frac{3}{5} = 0$  mit der Lösung  $z_{1,2} = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{15}{25}}$  bzw.  $z_{1,2} = \frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} = 1, -\frac{3}{5}$ . Aus  $z_1 = 1$  folgt  $x_1 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$  und mit der Periodizität des Sinus erhalten wir die Lösungen  $x_{1,k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Aus  $z_2 = -\frac{3}{5}$  folgt  $x_2 = \arcsin(-\frac{3}{5})$  und mit der Periodizität des Sinus erhalten wir die Lösungen  $x_{2,k} = \arcsin(-\frac{3}{5}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Aus Symmetriegründen sind auch  $x_{3,k} = \pi - x_{2,k}, k \in \mathbb{Z}$ , potenzielle Lösungen der Gleichung.

Da quadriert wurde, sind die Lösungen durch Einsetzen zu prüfen. Aufgrund der  $2\pi$ -Periode reicht jeweils ein Wert:  $\sin(x_{1,0}) + 2 \cos(x_{1,0}) - 1 = 0$ . Also sind die  $x_{1,k}$  tatsächlich Lösungen der Gleichung. Entsprechend gilt  $\sin(x_{2,0}) +$

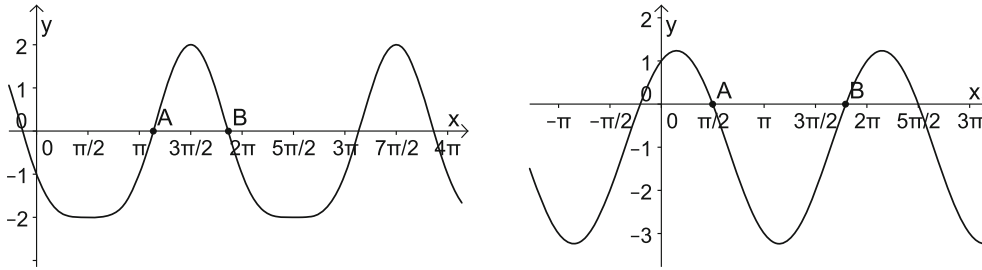


Abb. B.4 Die Funktionen aus Aufgabe 2.13 b) links und c) rechts

$2 \cos(x_{2,0}) - 1 = -\frac{3}{5} + 2\sqrt{1 - \frac{3^2}{5^2}} = -\frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = 0$ , also sind die  $x_{2,k}$  ebenfalls Lösungen. Einsetzen von  $x_{3,1} = 3.7851$  zeigt, dass  $x_{3,1}$  die Gleichung nicht löst, d. h. die  $x_{3,k}$  sind keine Lösungen der Gleichung.

Abb. B.4, rechts, zeigt die Lösungen im Intervall  $[0, 2\pi]$ : Der Punkt A entspricht  $x_{1,1}$  und B entspricht  $x_{2,1}$ . Alternativ: Die Vereinheitlichung von  $\sin(x) + 2 \cos(x) = 1$  auf  $\cos(x)$  liefert  $\sqrt{1 - \cos^2(x)} + 2 \cos(x) = 1$  bzw.  $\sqrt{1 - \cos^2(x)} = 1 - 2 \cos(x)$ . Quadrieren ergibt  $1 - \cos^2(x) = 1 - 4 \cos(x) + 4 \cos^2(x)$  bzw.  $5 \cos^2(x) = 4 \cos(x)$ . Für den Fall  $\cos(x) = 0$  folgen die Lösungen  $x_{1,k} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Beim Test durch Einsetzen bleiben nur die  $x_{1,k}$  mit geradem  $k$  als Lösungen übrig. Für den Fall  $\cos(x) \neq 0$  folgt die Gleichung  $\cos(x) = \frac{4}{5}$  mit den Lösungen  $x_{2,k} = \arccos(\frac{4}{5}) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sowie aus Symmetriegründen  $x_{3,k} = -\arccos(\frac{4}{5}) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Beim Test durch Einsetzen erweisen sich die  $x_{2,k}$  als Scheinlösungen, d. h. sie erfüllen die Ausgangsgleichung nicht. Die  $x_{3,k}$  sind Lösungen der Ausgangsgleichung.

2.14

a) Zunächst formen wir um:

$$R_1(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2 - 2x + 1 + 2x}{x^2 - 2x + 1} = 1 + \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} = 1 + \frac{2x}{(x-1)^2}$$

Partialbruchzerlegung des rationalen Anteils:

$$\frac{2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Multiplikation mit dem HN liefert  $2x = A(x-1) + B$ . Für  $x = 1$  folgt  $B = 2$  und der Vergleich der  $x$ -Potenzen liefert:  $A = 2$ . Also:

$$\frac{2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

und wir erhalten

$$R_1(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

b) Der Ansatz der Partialbruchzerlegung lautet

$$R_2(x) = \frac{4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert:

$$4x + 4 = A(x + 2) + B(x - 2)$$

bzw.

$$4x + 4 = (A + B)x + (2A - 2B)$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:  $A + B = 4$ ,  $2A - 2B = 4$  bzw.  $A = 3$  und  $B = 1$ . Es folgt

$$R_2(x) = \frac{4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+2}$$

c) Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$R_3(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1) \cdot (x-3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert:

$$x^2 + 1 = A(x-3)^2 + B(x-1)(x-3) + C(x-1)$$

Für  $x = 1$ :  $2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ . Für  $x = 3$ :  $10 = 2C \Rightarrow C = 5$ .

Für  $x = 0$ :  $1 = \frac{9}{2} + 3B + 5 \cdot (-1) \Rightarrow B = \frac{1}{2}$ . Es folgt:

$$R_3(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1) \cdot (x-3)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-3} + 5 \frac{1}{(x-3)^2}$$

### Kapitel 3

3.1 Für  $z_1 = 2 + i$  und  $z_2 = 1 + 3i$  folgt:

- a)  $z_1 + z_2 = 3 + 4i$
- b)  $z_1 - z_2 = 1 - 2i$
- c)  $z_1 \cdot z_2 = -1 + 7i$
- d)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- e)  $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+3i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{5+5i}{5} = 1 + i$
- f)  $\overline{z_2} \cdot z_1 = (1-3i) \cdot (2+i) = 5 - 5i$
- g)  $z_2 \cdot \overline{z_2} = (1+3i) \cdot (1-3i) = 10$

**3.2**

- a)  $\frac{2+z}{4i} = 7i \Rightarrow z = 7i \cdot 4i - 2 = -30$
- b)  $\frac{1}{z} + \frac{1}{i} = 3 \Rightarrow \frac{1}{z} = 3 - \frac{1}{i} = 3 + i \Rightarrow z = \frac{1}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{3-i}{10}$
- c)  $\frac{3z}{4z+2} = 4i \Rightarrow 3z = 16zi + 8i \Rightarrow (3 - 16i)z = 8i \Rightarrow z = \frac{8i}{3-16i} \cdot \frac{3+16i}{3+16i} = \frac{-128+24i}{265}$
- d)  $z + 2\bar{z} = 25 + 3i \Rightarrow (x + iy) + 2(x - iy) = 25 + 3i \Rightarrow 3x - iy = 25 + 3i \Rightarrow x = \frac{25}{3}, y = -3, \text{ also } z = \frac{25}{3} - 3i$

**3.3** Umwandeln in kartesische Darstellung:

- a)  $z_1 = \frac{4-3i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-7i}{2}$ , also  $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}, \text{Im}(z) = -\frac{7}{2}$
- b)  $z_2 = (1 + i) \cdot (3 - i) = 4 + 2i$ , also  $\text{Re}(z) = 4, \text{Im}(z) = 2$
- c)  $z_3 = \sqrt{2}(\sin(\frac{\pi}{4}) - i \cos(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - i$
- d)  $z_4 = \frac{2e^{\frac{\pi}{4}i}}{1+i} = \frac{2e^{\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt{2}$ , also  $\text{Re}(z) = \sqrt{2}, \text{Im}(z) = 0$

**3.4**

- a)  $z_1 = 2 + 3i, r = \sqrt{13}, \varphi = \arctan(\frac{3}{2}), z_1 = \sqrt{13} \cdot e^{i \arctan(\frac{3}{2})}$   
 $z_2 = -2 - 4i, r = \sqrt{20}, \varphi = \arctan(2) + \pi, z_2 = \sqrt{20} \cdot e^{i(\arctan(2)+\pi)}$  und  $z_3 = -7 = 7 \cdot e^{i\pi}$
- b) Mit  $z_1 = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$  und  $z_2 = 5 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$  folgt:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot 5 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i} = 10 \cdot e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4})i} = 10 \cdot e^{\pi i} = -10$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}}{5 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{2}{5} \cdot e^{(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})i} = \frac{2}{5} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} = -\frac{2}{5}i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}}{2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{5}{2} \cdot e^{(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4})i} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = \frac{5}{2}i$$

$$z_1^3 = (2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i})^3 = 2^3 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i} = 8 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$z_2^7 = (5 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i})^7 = 5^7 \cdot e^{\frac{21\pi}{4}i} = 5^7 \cdot e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

**3.5** Beide Seiten müssen in derselben Darstellungsform vorliegen. Hier bietet es sich an, die linke Seite in die kartesische Form zu bringen:

$$(x + yi)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt:

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{und} \quad 2xy = 4$$

Aus der zweiten Beziehung ergibt sich  $y = \frac{2}{x}$ . Eingesetzt in die erste Beziehung erhält man  $x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$ , woraus man  $x$  bestimmen kann:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{ist eine biquadratische Gleichung}$$

$$u^2 - 3u - 4 = 0 \quad \text{nach Substitution } x^2 = u$$

$$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Also gibt es zwei Möglichkeiten für  $u$ , nämlich  $u_1 = 4$  und  $u_2 = -1$ . Das ergibt vier mögliche Lösungen für  $x$ :  $x_1 = 2$ ,

$x_2 = -2, x_3 = i, x_4 = -i$ . Zu jeder Lösung für  $x$  bestimmt man den passenden  $y$ -Wert  $y = \frac{2}{x}$ :  $y_1 = 1, y_2 = -1, y_3 = \frac{2}{i} = -2i, y_4 = -\frac{2}{i} = 2i$ . Da aber  $x, y \in \mathbb{R}$  gesucht sind, sind die Paare  $x_3, y_3$  und  $x_4, y_4$  keine Lösungen der Aufgabe.

**3.6**  $\underline{Y}$  muss in kartesische Darstellung gebracht werden, damit man den Imaginärteil ablesen kann. Dazu muss der Nenner des Bruchs reell gemacht werden:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C$$

$$= \frac{1}{R + i\omega L} \cdot \frac{R - i\omega L}{R - i\omega L} + i\omega C$$

$$= \frac{R - i\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + i\omega C$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - i \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + i\omega C$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + i \left( \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right)$$

Es ist also

$$\text{Im}(\underline{Y}) = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Nullsetzen und Auflösen nach  $\omega$  ergibt:

$$\omega \left( C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) = 0$$

und dividieren durch  $\omega$  (nur  $\omega \neq 0$  ist sinnvoll) ergibt:

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Wir lösen nach  $\omega^2$  auf:

$$\omega^2 L^2 C + CR^2 = L$$

$$\omega^2 = \frac{L - CR^2}{L^2 C}$$

und ziehen die Wurzel:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

denn nur  $\omega > 0$  ist sinnvoll.

**3.7** Es gilt:

$$y_1(t) - y_2(t) = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t) - (\cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t))$$

$$= 2i \sin(\omega_0 t)$$

Damit erhalten wir  $\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i}(y_1(t) - y_2(t)) = -\frac{i}{2}(y_1(t) - y_2(t))$ . Weiter folgt:

$$x(t) = A \cdot e^{\delta_0 t} \cdot \sin(\omega_0 t) = -\frac{i}{2} \cdot A \cdot e^{\delta_0 t} \cdot (y_1(t) - y_2(t))$$

3.8

a) Mit der Polardarstellung  $1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$  folgt:

$$z_1 = (\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}})^{12} = 2^6 \cdot e^{-i3\pi} = 64 \cdot e^{-i\pi} = -64$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) = -64, \quad \operatorname{Im}(z_1) = 0$$

$$z_2 = \frac{i \cdot i^4 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{i - 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{Re}(z_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{Im}(z_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Mit  $z = x + iy$  folgt zunächst  $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 \Rightarrow \operatorname{Im}(z^2) = 2xy$ . Mit  $\operatorname{Im}(z) = y$  ergibt sich weiter die Ungleichung  $2xy > y$ .

Für  $y > 0$  folgt  $2x > 1$  bzw.  $x > \frac{1}{2}$ . Für  $y < 0$  folgt  $2x < 1$  bzw.  $x < \frac{1}{2}$ .

3.9

a)  $z(c) = \frac{1+i}{c-i} \cdot \frac{c+i}{c+i} = \frac{c-1+i(c+1)}{c^2+1}$ . Für  $c = -1$  ist  $z(-1) = -\frac{2}{2} = -1 \in \mathbb{R}$ . Für  $c = 1$  ist  $z(1) = i \cdot \frac{2}{2} = i$ , also rein imaginär.

b) Es gilt  $z(0) = \frac{1+i}{-i} = \frac{1+i}{-i} \cdot \frac{i}{i} = i-1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}$ . Weiter folgt

$$(z(0))^{11} = \sqrt{2}^{11} \cdot e^{i\frac{33}{4}\pi} = 32 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 32 \cdot \sqrt{2} \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 32 \cdot \sqrt{2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 32 + 32i.$$

c) Aus  $w^3 = i-1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi)}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  folgen die drei Wurzeln

$$w_k = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi)} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

3.10

a)  $z_1 = \frac{1 + \frac{1}{i}}{1 + \frac{1}{i^3}} = \frac{1 + \frac{1}{i}}{1 - \frac{1}{i}} = \frac{i+1}{i-1} \cdot \frac{-i-1}{-i-1} = \frac{-2i}{2} = -i.$

$$z_2 = \frac{(1+2i) \cdot (2+i)}{(2-i)^2} = \frac{5i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{-20+15i}{25} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

b) Substitution  $z^3 = u$  ergibt  $u^2 - 4u + 8 = 0$  mit Lösung  $u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm 2i$ . In Polardarstellung gilt  $u_{1,2} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ . Wir ziehen die komplexen Wurzeln:

$$z^3 = 2^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\pm i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i}$$

$$\Rightarrow z_k = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}i}$$

$$z_{3+k} = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}i}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Kapitel 4

4.1 Zum Beweis ist also zu zeigen:

Es gibt  $K > 0 : |a_n| \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Es sei also  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine konvergente Folge mit dem Grenzwert  $a = \lim a_n$ . Es gibt daher für  $\varepsilon = 1 > 0$  einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  mit

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Nun gilt hiermit

$$|a_n| = |a_n - a + a| \stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \underbrace{|a_n - a|}_{< 1, n \geq n_0} + |a| < 1 + |a|, \quad n \geq n_0.$$

Also gilt bereits für fast alle Folgenglieder (d. h. für  $a_n$  mit  $n \geq n_0$ )

$$|a_n| < 1 + |a| \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Damit wäre für alle Folgenglieder  $a_n$  ab Index  $n_0$  die Zahl  $1 + |a| > 0$  bereits eine obere Schranke für ihre Beträge  $|a_n|$ . Für die endlich vielen restlichen Folgenglieder  $a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}$  gilt aber

$$|a_k| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|\}.$$

Mit  $K = \max\{1 + |a|, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$  folgt dann die Behauptung

$$|a_n| \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Folge  $(a_n)_n$  ist also beschränkt.

Eine Folge, die nicht beschränkt ist, kann also nicht konvergieren. Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht. Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergieren. Ein Beispiel ist  $a_n = (-1)^n$ .

4.2

a)  $a_n = \frac{n^2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

b)  $a_n = \underbrace{(-1)^n}_{\text{beschr.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

c)  $a_n = n \cdot \frac{1-n^2}{n^2-n^3} \stackrel{n > 0}{=} \frac{1-n^2}{n-n^2} = \frac{(1-n)(1+n)}{n(1-n)} = \frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} + \underbrace{1}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

d)  $a_n = n - \frac{1+4n^2}{4n+2} = \frac{4n^2+2n-1-4n^2}{4n+2} = \frac{2n-1}{4n+2} = \frac{2-\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$

e)  $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$  für  $n \geq 1$  (rekursiv definierte Folge mit Anfangswert  $a_0 = 1$ )

Es gilt

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a_{n-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a_{n-3}$$

$$= \dots \cdot \frac{1}{2^k}a_{n-k} = \dots$$

$$= \frac{1}{2^n}a_{n-n} = \frac{1}{2^n}a_0 = \frac{1}{2^n}.$$

Da  $2^n$  streng monoton wächst und nicht nach oben beschränkt ist, gilt  $2^n \rightarrow \infty$  und daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

f)  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  für  $n \geq 2$ , und  $a_0 = 1 = a_1$  (Fibonacci-Folge)

Man zeigt, dass  $(a_n)_n$  streng monoton wächst, sofern  $n \geq 2$ . Es sei nun  $n \geq 2$ , dann gilt

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} > a_{n-2} + a_{n-2} = 2a_{n-2} \\ &= 2(a_{n-3} + a_{n-4}) \\ &> 2(a_{n-4} + a_{n-4}) = 2 \cdot 2a_{n-4} \\ &> \dots > 2^m a_{n-2m}. \end{aligned}$$

Für gerades  $n \geq 2$  ist  $\frac{n}{2} - 1$  eine ganze Zahl und es gilt daher mit  $m = \frac{n}{2} - 1$

$$a_n > 2^{(n/2-1)} a_{n-2(n/2-1)} = 2^{n/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_2 = 2^{n/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

während für ungerades  $n \geq 3$  mit  $m = (n-1)/2 \in \mathbb{N}_0$  nach obiger Abschätzung

$$a_n > 2^{(n-1)/2} a_{n-2 \cdot (n-1)/2} = 2^{(n-1)/2} a_1 = 2^{(n-1)/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

gilt. Daher ist die Fibonacci-Folge bestimmt divergent gegen  $\infty$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

**4.3** Zu untersuchen ist das Konvergenzverhalten der Exponentialfolge  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  in Abhängigkeit vom Parameter  $q \in \mathbb{R}$ .

**Fall 1:**  $q > 1$ : Hier gilt also  $q - 1 > 0$ . Man kann wegen des binomischen Lehrsatzes  $q^n$  nun in folgender Weise nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned} q^n &= (1 + (q - 1))^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (q - 1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (q - 1)^k \\ &= \binom{n}{0} (q - 1)^0 + \binom{n}{1} (q - 1)^1 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (q - 1)^k \\ &= 1 + n(q - 1) + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (q - 1)^k}_{> 0, \text{ da } q-1 > 0} \\ &> 1 + n(q - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, \quad \text{da } q - 1 > 0 \end{aligned}$$

Daher gilt  $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

**Fall 2:**  $q = 1$ : Hier ist  $q^n = 1^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

**Fall 3:**  $q = 0$ : Hier ist  $q^n = 0^n \stackrel{n > 0}{=} 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

**Fall 4:**  $q = -1$ : Hier ist  $q^n = (-1)^n$  divergent.

**Fall 5:**  $q < -1$ : Hier gilt  $q = -|q|$  und  $|q| > 1$ . Daher gilt aufgrund des ersten Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \infty$  und man hat  $q^n = (-|q|)^n = (-1)^n (|q|)^n$  divergent.

**Fall 6:**  $-1 < q < 1$  und  $q \neq 0$ : Hier gilt also  $0 < |q| < 1$ . Daher ist

$$1 < \frac{1}{|q|} = \left| \frac{1}{q} \right|.$$

Aufgrund des ersten Falls gilt daher  $\left| \frac{1}{q} \right|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  und damit

$$|q|^n = \frac{1}{\left| \frac{1}{q} \right|^n} = \frac{1}{\left| \frac{1}{q^n} \right|} = \frac{1}{\left| \frac{1}{q} \right|^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Zusammenfassend:

$$q > 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty,$$

$$|q| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0,$$

$$q = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1,$$

$$q \leq -1 \implies (q^n)_n \text{ divergent.}$$

**4.4**

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n(n+2)+1} = 0$  (Hier gilt Zählergrad < Nennergrad.)

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 4n^2 + 7n - 2n^2 + 8n^5 - 14}{((n-2)^4 + 2)(2-4n)} = \frac{8}{-4} = -2$  (Hier ist Zählergrad = Nennergrad, sodass das Verhältnis der Leitkoeffizienten den Grenzwert ergibt.)

**4.5**

a) Der Beweis erfolgt per Induktion über die Anzahl  $n \geq 2$  der Widerstände.

Induktionsanfang für  $n = 2$ :

Es gilt das aus der Elektrotechnik bekannte Gesetz über die Parallelschaltung zweier Widerstände:

$$\frac{1}{R^{(2)}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Dies ist die Behauptung für  $n = 2$ .

Induktionsvoraussetzung: Für ein  $n \geq 2$  gelte:

$$\frac{1}{R^{(n)}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}.$$

Induktionsschritt von  $n$  auf  $n + 1$ :

Zu zeigen ist also, dass unter der Induktionsvoraussetzung auch

$$\frac{1}{R^{(n+1)}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{R_k}$$

gilt.

Wir fassen die ersten  $n$  Widerstände als Einzelwiderstand  $R^{(n)}$  auf. Dieser Schaltung wird also ein  $n + 1$ -ster Widerstand  $R_{n+1}$  parallel hinzugeschaltet. Es gilt daher wegen des Gesetzes über die Parallelschaltung zweier Widerstände

$$\frac{1}{R^{(n+1)}} = \frac{1}{R_{n+1}} + \frac{1}{R^{(n)}}.$$



Wir setzen für den Widerstandskehrwert  $\frac{1}{R^{(n)}}$  die Summe nach Induktionsvoraussetzung ein:

$$\frac{1}{R^{(n+1)}} = \frac{1}{R_{n+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{R_k}$$

b) Der Beweis erfolgt per Induktion über die Anzahl  $n \geq 2$  der Widerstände.

Induktionsanfang für  $n = 2$ :

$$\frac{1}{R^{(2)}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

kehrwertmäßig folgt daher

$$R^{(2)} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\prod_{k=1}^2 R_k}{\sum_{k=1}^2 \prod_{j \neq k} R_j}$$

Dies ist die Behauptung für  $n = 2$ .

Induktionsvoraussetzung: Für ein  $n \geq 2$  gelte

$$R^{(n)} = \frac{\prod_{k=1}^n R_k}{\sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} R_j}$$

Induktionsschritt von  $n$  auf  $n + 1$ :

Zu zeigen ist also, dass unter der Induktionsvoraussetzung auch

$$R^{(n+1)} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} R_k}{\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{j \neq k} R_j}$$

gilt. Nach Aufgabenteil a) gilt für den Widerstandskehrwert einer Parallelschaltung von  $n + 1$  Widerständen

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^{(n+1)}} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{R_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} + \frac{1}{R_{n+1}} \stackrel{\text{a)}}{=} \frac{1}{R^{(n)}} + \frac{1}{R_{n+1}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} R_j}{\prod_{k=1}^n R_k} + \frac{1}{R_{n+1}} \quad (\text{Induktionsvor.}) \\ &= \frac{R_{n+1} \sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} R_j}{R_{n+1} \prod_{k=1}^n R_k} + \frac{\prod_{k=1}^n R_k}{R_{n+1} \prod_{k=1}^n R_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum_{k=1}^n R_{n+1} \prod_{j=1, j \neq k}^n R_j + \prod_{k=1}^n R_k}{\prod_{k=1}^{n+1} R_k} = \frac{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^{n+1} R_j + \prod_{j=1}^n R_j}{\prod_{k=1}^{n+1} R_k} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{j=1, j \neq k}^{n+1} R_j}{\prod_{k=1}^{n+1} R_k} \end{aligned}$$

Nach Kehrwertbildung auf beiden Seiten folgt

$$R^{(n+1)} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} R_k}{\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{j=1, j \neq k}^{n+1} R_j}$$

Die Formel für den Gesamtwiderstand kann aber auch durch direkte Herleitung gezeigt werden. Hierzu schreiben wir zunächst nach Aufgabenteil a)

$$R^{(n)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$$

Die Erweiterung des rechts stehenden Bruchs mit dem Produkt aller  $n$  Widerstandswerte ergibt

$$R^{(n)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}} = \frac{\prod_{k=1}^n R_k}{\prod_{k=1}^n R_k \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \right)} = \frac{\prod_{k=1}^n R_k}{\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^n R_j}{R_k}} = \frac{\prod_{k=1}^n R_k}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n R_j}$$

Die unter Teil b) durchgeführte vollständige Induktion ist aber eine gute Übung zum Umgang mit Summen- und Produktzeichen.

c) Zu zeigen ist, dass unter der Voraussetzung  $0 < R_k \leq R_{\max}$  für  $k \geq 2$  die Folge der Gesamtwiderstände  $(R^{(n)})_{n \geq 2}$  eine Nullfolge ist, d. h. zu zeigen ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R^{(n)} = 0.$$

Nun gilt aufgrund der Voraussetzung

$$R_k \leq R_{\max} \quad \text{für } k \geq 2.$$

Da  $R_k > 0$ , folgt nach Kehrwertbildung auf beiden Seiten dieser Ungleichung

$$\frac{1}{R_k} \geq \frac{1}{R_{\max}} \quad \text{für } k \geq 2.$$

Wir fassen beide Seiten dieser Ungleichung als Summanden einer Reihe auf und erhalten nach Summenbildung

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{\max}} = \frac{n}{R_{\max}}.$$

Nach erneuter Kehrwertbildung erhalten wir

$$R^{(n)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}} \leq \frac{R_{\max}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Folge der Gesamtwiderstände  $R^{(n)}$  ist also eine Folge positiver Werte, die sich nach oben durch die Werte einer Nullfolge abschätzen lassen. Daher ist auch  $R^{(n)}$  eine Nullfolge. Dieses Ergebnis erscheint anschaulich. Unendlich viele Widerstände, die parallel geschaltet werden, ergeben den Gesamtwiderstand Null. Durch das Parallelschalten werden unendlich viele Umwege für den Strom geschaffen, sodass jede positive Widerstandsgrenze vom Gesamtwiderstand unterschritten werden kann, wenn  $n$  nur hinreichend groß gewählt wird. Allerdings ist die Beschränktheitsvoraussetzung  $0 < R_k \leq R_{\max}$  für  $k \geq 2$  hierbei entscheidend.

Es stellt sich die Frage, ob es auch unbeschränkte Einzelwiderstandsfolgen geben könnte, mit denen sich bei unendlicher Parallelschaltung kein Grenzwiderstand mit dem Wert 0 ergibt. Dies könnte evtl. durch besonders schnell ansteigende Folgen geschehen. So ergibt beispielsweise die Einzelwiderstandsfolge  $R_k = k!$  eine Gesamtwiderstandsfolge, die nicht gegen Null konvergiert:

$$\begin{aligned} R^{(n)} &= \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - 1} \\ &= \frac{1}{e - 1} > 0 \end{aligned}$$

Dieses Phänomen können wir uns auch anschaulich erklären. Die Werte der Einzelwiderstände steigen offenbar so schnell an, dass dies durch Parallelschaltung nicht wieder kompensiert werden kann.

Wenn wir alternativ die ebenfalls nicht nach oben beschränkte Widerstandsfolge  $R_k = k$  betrachten, so erhalten wir dagegen wieder den Grenzwiderstand 0:

$$R^{(n)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Hierbei haben wir uns die Tatsache zunutze gemacht, dass die harmonische Reihe bestimmt divergent gegen  $\infty$  ist (Aufgabe 4.6b)). Diese Folge würde demnach wiederum dazu führen, dass durch hinreichend häufige Parallelschaltung die Folge der Gesamtwiderstände jeden beliebigen (positiven) Widerstandsschwellwert unterschreitet, also gegen Null konvergiert. Die Beschränktheitsbedingung ist also hinreichend, aber nicht notwendig für den Grenzwiderstand 0.

#### 4.6

a) Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  in Ab-

hängigkeit vom reellen Parameter  $q$ :

Zunächst gilt für  $q \neq 1$  für die  $n$ -te Partialsumme der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Wir unterscheiden gem. des Konvergenzverhaltens von  $q^n$  vier Fälle:

**Fall 1:**  $|q| < 1$ , also  $-1 < q < 1$ : Laut Aufgabe 9 gilt in diesem Fall:  $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Daher gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

**Fall 2:** Für  $q = 1$  ist die obige Partialsummenformel nicht anwendbar. Für die geometrische Reihe gilt in diesem Fall

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

**Fall 3:**  $q \leq -1$ : Hier ergibt die Folge der Partialsummen eine Folge ohne Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - (-1)^{n+1}|q|^{n+1}}{1 - q}$$

Für  $q = -1$  ergibt dies die Folge  $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ , für  $q < -1$  ergibt dies eine alternierende Folge.

**Fall 4:**  $q > 1$ : Laut Aufgabe 9 gilt in diesem Fall:  $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . Daher gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} q^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}}_{> 0} = \infty. \end{aligned}$$

b) Zu zeigen ist die bestimmte Divergenz der harmonischen Reihe gegen  $\infty$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty. \end{aligned}$$

Wir haben damit die harmonische Reihe nach unten gegen eine bestimmt gegen  $\infty$  divergierende Reihe abgeschätzt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \geq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Es bleibt daher für die harmonische Reihe nichts anderes übrig, als ebenfalls bestimmt gegen  $\infty$  zu divergieren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

**4.7** Wir zeigen die Konvergenz der angegebenen Folgen mit dem Quotientenkriterium. Hinweis: Hierbei wird nicht der Reihengrenzwert berechnet, sondern lediglich ein Kriterium überprüft, woraus die absolute Konvergenz der jeweiligen Reihe folgt.

a) Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ :

Es ist  $a_k = \frac{1}{k!}$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Daher gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2} =: q < 1$$

für alle  $k > k_0 := 1$ . Nach dem Quotientenkriterium konvergiert also die obige Reihe absolut. Wegen  $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  gilt

für den Grenzwert  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ .

b) Konvergenz von  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k}$ :

Es ist  $a_k = (-1)^k \frac{1}{2^k}$  für  $k \geq 1$ . Daher gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} =: q < 1 \quad \text{für alle } k > 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert also diese Reihe absolut. Für den Grenzwert gilt (geometrische Reihe):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 1 \\ &= \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} - 1 = \frac{2}{3} - 1 \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

c) Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{k!}$ :

Es ist  $a_k = 2^k \frac{1}{k!}$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Daher gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{2^{k+1} k!}{2^k (k+1)!} = \frac{2}{k+1} \leq \frac{2}{3} =: q < 1$$

für alle  $k \geq k_0 := 2$ . Nach dem Quotientenkriterium konvergiert also diese Reihe (absolut). Der Grenzwert lautet

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{k!} = e^2.$$

d) Konvergenz von  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ :

Es ist  $a_k = \frac{k!}{k^k}$  für  $k \geq 1$ . Daher gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \frac{(k+1)! k^k}{(k+1)^{k+1} k!} = \frac{(k+1) k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} \\ &= \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{k}}\right)^k = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{k}\right)^j} \\ &= \frac{1}{1 + k \cdot \left(\frac{1}{k}\right) + \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{k}\right)^j} \\ &\leq \frac{1}{1 + k \cdot \left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{1}{2} =: q < 1 \quad \text{für alle } k \geq 1. \end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert also diese Reihe (absolut).

e) Konvergenz von  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ : Es ist  $a_n = \frac{n^4}{3^n}$  für  $n \geq 1$ . Daher gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{(n+1)^4 \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n^4} = \frac{1}{3} \frac{(n+1)^4}{n^4} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \frac{1}{3} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}} \\ &< \frac{9}{10} = 0.9 =: q < 1 \end{aligned}$$

für alle  $n \geq n_0$  hinreichend groß. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert also diese Reihe (absolut).

**4.8** Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (2x - x^2 - 1)^{2k} &= \sum_{k=0}^{\infty} ((-x^2 + 2x - 1)^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ((x^2 - 2x + 1)^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} ((x-1)^2)^k. \end{aligned}$$

Hierin erkennen wir eine geometrische Reihe. Sie konvergiert genau dann, wenn

$$\begin{aligned} |(x-1)^2| < 1 &\Leftrightarrow (x-1)^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow |x-1| < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < x < 2. \end{aligned}$$

Für  $x \in (0, 2)$  lautet ihr Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2x - x^2 - 1)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} ((x-1)^2)^k = \frac{1}{1 - (x-1)^2} = \frac{1}{2x - x^2}.$$

**4.9** Die Konvergenz ergibt sich jeweils aus der Grenzwertbestimmung.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k^2 - k)}{k!} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)k}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2\pi^{2k}}{2^{2k}(2k-1)!} &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(\frac{\pi}{2})^{2(k+1)}}{(2(k+1)-1)!} \\ &= -2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{\pi}{2})^{2k+2}}{(2k+1)!} \\ &= -\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi \end{aligned}$$

**4.10** Der Abbruch der Reihe bei  $k = 5$  ergibt ein Näherungspolynom  $p \in \mathbb{Q}[x]$  für  $\exp(x)$  vom Grad 5, das exakt ist für  $x = 0$ :

$$\exp(x) \approx \sum_{k=0}^5 \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} =: p_5(x)$$

Es ist zu erwarten, dass sich für  $|x| < 1$  mit  $p(x)$  akzeptable Näherungen für die Exponentialfunktion ergeben, denn die Potenzierung einer Zahl vom Betrag kleiner als Eins führt zur Verkleinerung, gleichzeitig wird innerhalb der weiteren Reihensummanden mit dem Nenner  $k!$  die Potenz  $x^k$  durch eine sehr schnell ansteigende Zahl geteilt. Die Beiträge der weiteren Summanden werden also schnell sehr klein werden. Wenn wir die Werteentwicklung von  $p_5(x)$  und  $\exp x$  für  $|x| \rightarrow \infty$  miteinander vergleichen, so fällt auf, dass

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} p_5(x) &= \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp x, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} p_5(x) &= -\infty \neq 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x. \end{aligned}$$

Es ist also zu erwarten, dass die Näherung  $p_5(x)$  für negative  $x$  schlechter ist als für positive  $x$ -Werte. Dies kann durch eine entsprechende Wertetabelle bestätigt werden. Die Genauigkeit der Näherung für negative  $x$ -Werte könnte beispielsweise dadurch gesteigert werden, indem weitere Summanden aus der Reihenentwicklung hinzugefügt werden. Andererseits wissen wir, dass zum einen die Näherung  $p_5(x)$  für  $x > 0$  besser ist als für negative  $x$ -Werte und dass zum anderen für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Regel

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$$

gilt. Wenn wir nun für  $x < 0$  die Näherung

$$\exp x = \frac{1}{\exp(-x)} \approx \frac{1}{p_5(-x)}$$

verwenden, so wird, bedingt durch  $-x > 0$ , eine gegenüber  $p_5(x)$  verbesserte Näherung zu erwarten sein. Wir nutzen daher

die folgende Approximation der Exponentialfunktion für negative  $x$ -Werte:

$$\exp x \approx \frac{1}{p_5(-x)} = \frac{1}{1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120}}, \quad x < 0$$

Der Vergleich der Ergebnisse anhand einer Wertetabelle zeigt dann eine deutliche Verbesserung gegenüber  $p_5(x)$ .

**4.11** Zunächst berechnen wir für die Höhe  $h$  des Dreiecks:

$$L_1 \sin \alpha = h = L_2 \sin \beta$$

hieraus ergibt sich

$$\frac{\sin \alpha}{L_2} = \frac{\sin \beta}{L_1}.$$

Das Verhältnis des Sinus eines Eckwinkels zur gegenüberliegenden Seite ist also für alle Eckwinkel gleich. Hieraus ergibt sich aus Symmetriegründen, wenn der obere Winkel des Dreiecks mit  $\gamma$  bezeichnet wird, der Sinussatz:

$$\frac{\sin \alpha}{L_2} = \frac{\sin \beta}{L_1} = \frac{\sin \gamma}{B}.$$

Da  $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ , lassen sich die gesuchten Strecken  $L_1$  und  $L_2$  aus den gegebenen Daten für  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $B$  hieraus berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta}{L_1} &= \frac{\sin(\pi - \alpha - \beta)}{B}, \\ h &= L_1 \sin \alpha = B \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} \end{aligned}$$

**4.12** Die Reihendarstellung des Sinus ergibt folgende Näherungen:

$$\begin{aligned} p_0(x) &:= x \\ p_1(x) &:= x - \frac{x^3}{6} = p_0(x) - \frac{x^3}{6} \\ p_2(x) &:= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = p_1(x) + \frac{x^5}{120} \\ p_3(x) &:= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} = p_2(x) - \frac{x^7}{5040} \end{aligned}$$

Eine Wertetabelle zeigt die Verbesserung der Näherung  $p_N(x)$  mit wachsendem  $N$ . Jede Näherung ist ein Polynom und daher nicht beschränkt. Für große  $|x|$  benötigen wir daher umso mehr Summanden. Da allerdings der Sinus periodisch ist, reicht es aus, eine Näherung zu wählen, die bereits im Bereich  $(-\pi, \pi)$  hinreichend gute Ergebnisse liefert.

## Kapitel 5

### 5.1

a) Der Graph ist symmetrisch um die Achse senkrecht durch  $x = 1$ . Die Werte sind durchweg positiv. Eine Definitionslücke ergibt sich bei  $x = 1$ . Zudem gilt  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$  und

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

- b) Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt  $(-2, -4)$ .
- c) Der Graph ist eine Gerade der Steigung  $\frac{3}{2}$  und  $y$ -Achsenabschnitt 1.
- d) Die Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert und nimmt ihr Maximum bei  $x = 1$  mit dem Wert  $f(1) = 2$  an. Der Graph ist symmetrisch zur Achse durch  $x = 1$ . Die Funktionswerte sind durchweg positiv und es gilt  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ . Durch den vergleichsweise hohen Exponenten 10 in der Wurzel, ergibt sich eine steile Anstiegs- und Abstiegsflanke, sodass der Graph eine hutförmige Gestalt annimmt.

**5.2**

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(e^x + e^{-1/x^2}) = \frac{1}{2}$
- b)  $\lim_{x \nearrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$  aber  $\lim_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$
- c)  $\lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{\tan(1-x)} = \infty$  sowie  $\lim_{x \searrow 1} \frac{1}{\tan(1-x)} = -\infty$   
Der (beidseitige) Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\tan(1-x)}$  existiert somit nicht.
- d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{x} + \exp(-x^2 + x)) = 1$
- e)  $\lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$  sowie  $\lim_{x \searrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$
- f)  $\lim_{x \nearrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+1}} = 1$  sowie  $\lim_{x \searrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+1}} = -1$
- g)  $\lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{\tan x}{|\tan x|} = 1$  sowie  $\lim_{x \searrow \pi/2} \frac{\tan x}{|\tan x|} = -1$

**5.3**

- a) Die Funktion ist streng monoton fallend auf ihrer Definitionsmenge  $[1, \infty)$ .
- b) Die Funktion ist streng monoton fallend auf ihrer Definitionsmenge  $(0, 1]$ .
- c) Die Funktion ist streng monoton wachsend auf ihrer Definitionsmenge  $[1, \infty)$ .
- d) Der Kosinus ist streng monoton fallend auf  $[0, \pi]$ .
- e) Die Funktion  $\sin x \cos x (\tan x + \frac{1}{\tan x}) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$  ist konstant und daher nicht streng monoton.
- f) Die Funktion ist also streng monoton fallend auf ihrer Definitionsmenge  $(-\infty, 0]$ .

**5.4**

- a)  $f^{-1} : [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}] \rightarrow [a, b], x \mapsto \frac{1}{x}$
- b)  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2\sqrt[3]{x-2} + 8$
- c)  $f^{-1} : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{(x+3)^2 - 1}$
- d) Die Funktion ist nicht umkehrbar.
- e)  $f^{-1} : (f(0), f(-\infty)) = (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_-, x \mapsto 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$
- f)  $f^{-1} : (f(0), f(-\infty)) = (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\sqrt{\ln x}$
- g)  $f^{-1} : (f(-\infty), f(\infty)) = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln x}{\ln 2}$ .

**5.5**

- a)  $K_n = K_0 (1 + \frac{z}{100})^n, n \in \mathbb{N}$
- b) Verdopplung nach einem Jahr:  $z = 100$ , Verdopplung nach zwei Jahren:  $z = 100(\sqrt{2} - 1) \approx 41.42$
- c) Für  $\lambda > 0$  als Vervielfältigungsfaktor sind  $n = \frac{\ln \lambda}{\ln(1 + \frac{z}{100})}$  Jahre notwendig. Bei fünfprozentigem Zinssatz ergeben sich

folgende Anlagezeiträume:

Anlageziel	$n$
Kapitalverdopplung ( $\lambda = 2$ )	14.2 Jahre
Kapitalverdreifachung ( $\lambda = 3$ )	22.5 Jahre
Kapitalverzehnfachung ( $\lambda = 10$ )	47.2 Jahre

**5.6** Wir betrachten die Messgröße  $y$  als Funktion in Abhängigkeit von der Messgröße  $x$  und gehen von einem polynomiellen Zusammenhang der Art

$$y(x) = A \cdot x^n, \quad A \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

aus. Die graphische Darstellung der Wertetabelle

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y$	0.5	4.0	13.5	32.0	62.5	108.0	171.5	256.0	364.5

ergibt eine parabelförmige Kennlinie, aus deren Darstellung es schwierig ist, die Parameter  $A$  und  $n$  zu ermitteln. Besser wäre eine Geradendarstellung, da eine Gerade durch Ordinatenachsenabschnitt und Steigung vollständig beschrieben wird. Diese beiden Werte können dann sehr leicht aus dem Graphen einer Geraden abgelesen werden. Aber wie können wir den Zusammenhang  $y(x) = Ax^n$  einer Geraden zuordnen? Die Antwort liefert der Logarithmus:

$$y = a \cdot x^n \iff \ln y = \ln(Ax^n) = \ln A + \ln x^n = \ln A + n \ln x.$$

Für den natürlichen Logarithmus der Messgröße  $y$  folgt somit

$$\ln y = \ln A + n \cdot \ln x.$$

Im Hinblick auf den Termbestandteil  $\ln x$ , der als Abszisse betrachtet wird, ist dies eine Gerade der Steigung  $n$  mit Ordinatenachsenabschnitt  $\ln A$  (Hierbei hätten wir auch jede andere Logarithmusfunktion, beispielsweise den dekadischen Logarithmus, verwenden können). Wir berechnen also die natürlichen Logarithmen der Messwerte und erhalten folgende Tabelle

$\ln x$	0.0	0.7	1.1	1.4	1.6	1.8	1.9	2.1	2.2
$\ln y$	-0.69	1.4	2.6	3.5	4.1	4.7	5.1	5.5	5.9

Die graphische Darstellung dieser Werte ergibt in der Tat in etwa eine Gerade. Damit wird einerseits der vermutete polynomielle Zusammenhang  $y = Ax^n$  indirekt bestätigt. Andererseits können wir auch die gesuchten Parameter  $A$  und  $n$  ermitteln. Den Ordinatenachsenabschnitt können wir zwar aus der graphischen Darstellung dieser Werte direkt ablesen, aber auch exakt angeben. Er ist der natürliche Logarithmus des ersten Messwertes bei  $x = 1$  und lautet

$$\ln A = \ln 0.5 \approx -0.693,$$

womit  $A = 0.5$  gilt. Die Steigung der Geraden berechnen wir mithilfe des Differenzenquotienten (Steigungsdreieck), beispielsweise ergibt sich für  $x_1 = 0.7$  und  $x_2 = 1.8$  die Steigung

$$n = \frac{1.4 - 4.7}{0.7 - 1.8} = \frac{-3.3}{-1.1} = 3.$$

Es gilt also offenbar der Zusammenhang

$$y(x) = 0.5 \cdot x^3.$$

## Kapitel 6

### 6.1

a)  $f'(x) = 2x + 1$

b)  $f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}$

c)  $\dot{f}(t) = 10t^4 - 28t^3 + 60t^2 - 40t + 10 + \frac{1}{(t-2)^2}$

d)  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

e)  $\dot{f}(t) = 8t^3 - 3t^2 + 6t - 1$

f)  $f'(x) = 0$

g)  $f'(x) = -\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} \cdot (x-1)^2} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1} \cdot (x-1)}$

**6.2** Es sei  $f'(\hat{x}) = 0$ . Wir betrachten nur den Fall  $f''(\hat{x}) > 0$  und zeigen, dass dann in  $\hat{x}$  ein lokales Minimum von  $f$  vorliegt. Für den Fall  $f''(\hat{x}) < 0$  können wir in analoger Weise auf ein lokales Maximum von  $f$  in  $\hat{x}$  schließen.

Da  $f'$  differenzierbar ist, gibt es eine Funktion  $d(x)$  mit

$$f'(x) = f'(\hat{x}) + f''(\hat{x})(x - \hat{x}) + d(x)$$

und

$$d(\hat{x}) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{d(x)}{x - \hat{x}} = 0.$$

Wegen  $f'(\hat{x}) = 0$  folgt zunächst

$$f'(x) = f''(\hat{x})(x - \hat{x}) + d(x). \quad (\text{B.1})$$

Es sei nun  $x \neq \hat{x}$  so nahe an  $\hat{x}$ , dass  $\left| \frac{d(x)}{x - \hat{x}} \right| < f''(\hat{x})$  ist. Dies ist möglich, da  $f''(\hat{x}) > 0$  ist und  $\frac{d(x)}{x - \hat{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \hat{x}} 0$  gilt. Da  $x - \hat{x} \neq 0$  ist, können wir (B.1) durch  $x - \hat{x}$  dividieren:

$$\frac{f'(x)}{x - \hat{x}} = f''(\hat{x}) + \frac{d(x)}{x - \hat{x}} \geq \underbrace{f''(\hat{x})}_{>0} - \underbrace{\left| \frac{d(x)}{x - \hat{x}} \right|}_{< f''(\hat{x})} > 0.$$

Es ist also

$$\frac{f'(x)}{x - \hat{x}} > 0.$$

Zähler und Nenner des Quotienten  $\frac{f'(x)}{x - \hat{x}}$  sind also vorzeichen-gleich. Für  $x > \hat{x}$  folgt daher  $f'(x) > 0$ , während für  $x < \hat{x}$  nur  $f'(x) < 0$  bleibt. Die Ableitung  $f'$  vollzieht also bei  $\hat{x}$  einen Null-durchgang von  $-$  nach  $+$ . Damit ist  $\hat{x}$  eine lokale Minimalstelle von  $f$ .

**6.3** Um das Additionstheorem des Kosinus,

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

zu zeigen, nutzen wir die Darstellungen des Kosinus und des Sinus mithilfe der Exponentialfunktion:

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = -\frac{i}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

und verwenden diese für die Berechnung von

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{1}{4} ((e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(e^{i\beta} - e^{-i\beta})) \\ &= \frac{1}{4} (e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)} \\ & \quad + e^{i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}) \\ &= \frac{1}{4} (2e^{i(\alpha+\beta)} + 2e^{-i(\alpha+\beta)}) = \frac{1}{2} (e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}) \\ &= \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Die entsprechende Formel für das Argument  $\alpha - \beta$  folgt direkt hieraus, indem die Eigenschaft  $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$  ausgenutzt wird. Das Additionstheorem für den Sinus,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

kann auf ähnliche Weise gezeigt werden.

Die Überlagerung zweier Teilschwingungen  $x(t) = A_0 \cos(\omega_x t)$  und  $y(t) = A_0 \cos(\omega_y t)$  führt zu einer resultierenden Schwin-gung, die sich aus der Addition beider Teilschwingungen ergibt:

$$s(t) = x(t) + y(t) = A_0 \cos(\omega_x t) + A_0 \cos(\omega_y t) \quad (\text{B.2})$$

Die Superposition (Addition der beiden Einzelschwingungen bei Überlagerung) ergibt eine Schwingung mit nichtkonstan-ter Amplitudenfunktion (Hüllkurve), die sich durch periodisch auftretende Schwingungsbäuche und Schwingungsknoten aus-zeichnet. Wir versuchen nun, diese beiden Summanden von  $s(t)$  so zusammenzufassen, dass sich ein Ausdruck der Form  $M(t) \cos(\omega t)$  ergibt. Mit der Wahl von

$$\alpha = \frac{\omega_x - \omega_y}{2} \cdot t, \quad \beta = \frac{\omega_x + \omega_y}{2} \cdot t$$

folgt zunächst

$$\omega_x t = \alpha + \beta, \quad \omega_y t = \beta - \alpha.$$

Dies in (B.2) eingesetzt ergibt unter Verwendung des Additions-theorems für den Kosinus:

$$\begin{aligned} s(t) &= A_0 \cos(\alpha + \beta) + A_0 \cos(\beta - \alpha) \\ &= A_0 \cos(\alpha + \beta) + A_0 \cos(\alpha - \beta) \\ &= A_0 \cos \alpha \cos \beta - A_0 \sin \alpha \sin \beta \\ & \quad + A_0 \cos \alpha \cos \beta + A_0 \sin \alpha \sin \beta \\ &= 2A_0 \cos \alpha \cos \beta \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_x - \omega_y}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_x + \omega_y}{2} t\right). \end{aligned}$$

Wir können nun den ersten Teil

$$M(t) := 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_x - \omega_y}{2} t\right)$$

als Modulation der Amplitude  $2A_0$  und der Kreisfrequenz  $\frac{\omega_x - \omega_y}{2}$  einer Trägerschwingung (repräsentiert durch die zweite Kosinusfunktion) mit der Kreisfrequenz  $\frac{\omega_x + \omega_y}{2}$  betrachten.

Die Überlagerung der beiden Teilschwingungen führt damit zu einer Gesamtschwingung mit dem Mittelwert  $\frac{\omega_x + \omega_y}{2}$  der Kreisfrequenzen der beteiligten Teilschwingungen.

Die hierbei aufmodulierte Hüllkurve  $M(t)$  mit der Periodendauer  $T_H = \frac{2 \cdot 2\pi}{\omega_x - \omega_y}$  macht sich als Schwebung bemerkbar, deren Frequenz sich aus dem Knotenabstand, der die Hälfte der Periodendauer  $T_H$  der Hüllkurve darstellt, ergibt:

$$\omega_{\text{Schwebung}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}T_H} = \frac{2\pi(\omega_x - \omega_y)}{\frac{1}{2} \cdot 4\pi} = \omega_x - \omega_y.$$

Die Schwebungsfrequenz ist demnach die Differenz der Frequenzen beider beteiligten Teilschwingungen.

**6.4**

- a) Die Funktion  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$  besitzt ein lokales Maximum bei  $x = 1$  und ein lokales Minimum bei  $x = 2$  (Monotoniesequenz:  $\uparrow, \downarrow, \uparrow$ ).
- b) Die Funktion  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$  besitzt lokale Minima bei  $x = -2$  und  $x = 1$  sowie ein lokales Maximum bei  $x = 0$  (Monotoniesequenz:  $\downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow$ ).
- c) Die Funktion  $f(t) = \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}}$  besitzt ein globales Maximum bei  $t = 1$  (Monotoniesequenz:  $\uparrow, \downarrow$ ).
- d) Die Funktion  $f(t) = \frac{\ln(t^2 + 1)}{t^2 + 1}$  besitzt lokale Maxima bei  $t = \pm\sqrt{e - 1}$  sowie ein globales Minimum bei  $t = 0$  (Monotoniesequenz:  $\uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow$ ).

**6.5**

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{1 - x^2} = -\frac{1}{2}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)e^{1 - x^2} = 0$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 1} (\cos(x - 1) - 1)(x - 1)^{-2} = -\frac{1}{2}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\frac{\pi}{2} - \arctan x) = 1$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(2 - x) \ln \frac{1}{(x - 1)^2} = 0$

**Kapitel 7**

**7.1**

- a) Es gilt  $\int_a^b \sin(2\pi t) dt = \int_a^b \sin(2\pi t) \frac{2\pi}{2\pi} dt = \frac{1}{2\pi} (\cos(2\pi a) - \cos(2\pi b))$ . Damit ergibt sich
  1. Für  $a = 0$  und  $b = 1$ :  $\int_0^1 \sin(2\pi t) dt = \frac{1}{2\pi} (\cos 0 - \cos(2\pi)) = 0$
  2. Für  $a = 0.5$  und  $b = 1.5$ :  $\int_{1/2}^{3/2} \sin(2\pi t) dt = \frac{1}{2\pi} (\cos \pi - \cos(3\pi)) = 0$

Dies können wir uns aber auch anhand des Graphen des Sinus veranschaulichen. Die Integration über eine (oder mehrere) Periode(n) des Sinus ergibt gleiche Flächeninhalte oberhalb (positiv) und unterhalb (negativ) der  $x$ -Achse unabhängig vom Startpunkt der Integration. Die Flächeninhalte kompensieren damit einander und das Integral über ganzzahlige Vielfache der Periodenlänge  $2\pi$  verschwindet jeweils.

- b)  $\int_0^1 (x^4 - (x - 1)^2 + x(x^2 - 1) + 2) dx = \frac{97}{60}$
- c)  $\int x(x - 1)e^x dx = \int (x^2 - x)e^x dx = (x^2 - 3x + 3)e^x + \mathbb{R}$
- d)  $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x}{x^2+1} dx = 1$
- e)  $\int \exp(\sin t) \cos t dt = \int \exp(\sin t) d \sin t = \exp(\sin t) + \mathbb{R}$
- f)  $\int \frac{1}{x+x^2} dx = \ln|x| - \ln|x+1| = \ln|\frac{x}{x+1}|$
- g)  $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \ln((x+5)^2|x-2|^3) + \mathbb{R}$
- h)  $\int_1^2 e^{\sqrt{x+1}} dx = 2e^{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1) + 2e^{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})$
- i)  $\int -2t \sin(t^2 - 1) dt = \cos(t^2 - 1) + \mathbb{R}$
- j)  $\int_0^1 \frac{4t}{t^3+t} dt = \pi$
- k)  $\int \frac{1}{2\sqrt{t(t+1)}} dt = \arctan \sqrt{t} + \mathbb{R}$

**7.2** Laut Newton gilt für die zweite Ableitung des Ortes  $x$  (Höhe) der Rakete

$$m\ddot{x}(t) = F.$$

Wir müssen hierbei beachten, dass die resultierende Kraft  $F$  sich aus dem Schub und der Schwerkraft zusammensetzt, und dass die Masse  $m(t)$  des Flugkörpers, bedingt durch den Treibstoffverbrauch, zeitabhängig ist, d. h. bis zur Leermasse und Nutzlastmasse von 60 kg abnimmt.

Da der Treibstoff innerhalb von 60 s gleichmäßig verbraucht wird, gilt für die zeitabhängige Masse in der ersten Minute nach Zündung folgender Zusammenhang:

$$m(t) = \frac{100 \text{ kg} - 60 \text{ kg}}{0 \text{ s} - 60 \text{ s}} \cdot t + 100 \text{ kg} = -\frac{2 \text{ kg}}{3 \text{ s}} \cdot t + 100 \text{ kg}$$

für  $0 \text{ s} \leq t \leq 60 \text{ s}$ . Nach 60 s ist der Treibstoff verbraucht, die Masse der Rakete bleibt also konstant:

$$m(t) = 60 \text{ kg}, \quad t \geq 60 \text{ s}$$

Die auf den Flugkörper einwirkende Kraft  $F$  setzt sich aus dem in den ersten 60 s auftretenden Schub  $F_{\uparrow} = F_0 = 1000 \text{ N}$  und der Schwerkraft  $F_{\downarrow} = -m(t) \cdot g$  zusammen. Daher lautet die Bewegungsgleichung für die Rakete während der ersten Minute ( $0 \text{ s} \leq t \leq 60 \text{ s}$ ) nach Zündung:

$$m(t) \cdot \ddot{x}(t) = F = F_{\uparrow} + F_{\downarrow} = F_0 - m(t) \cdot g, \quad (\text{B.3})$$

bzw. nachdem der Treibstoff verbraucht ist ( $t \geq 60 \text{ s}$ ):

$$m(t = 60 \text{ s}) \cdot \ddot{x}(t) = F = F_{\downarrow} = -m(t = 60 \text{ s}) \cdot g. \quad (\text{B.4})$$

Höhe und Geschwindigkeit der Rakete betragen beim Startzeitpunkt jeweils 0 m bzw.  $0 \text{ m s}^{-1}$ .

Wie gelangen wir nun zu einer Formel, die uns die Höhe und die Geschwindigkeit der Rakete zunächst in der ersten Minute nach

Zündung angibt? Mit der newtonschen Bewegungsgleichung (B.3) und den Anfangswerten für Höhe und Geschwindigkeit, liegt Information über die zweite Ableitung der Höhe, also über die Vertikalbeschleunigung der Rakete vor, aus der wir per Integration die Geschwindigkeit und die Höhe berechnen können. Für die erste Minute gilt laut (B.3):

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m(t)} - g = \frac{F_0}{-\frac{2}{3} \cdot t + 100} - g, \quad 0 \text{ s} \leq t \leq 60 \text{ s}$$

Integration unter Berücksichtigung der Startgeschwindigkeit  $\dot{x}(0) = 0 \text{ m s}^{-1}$  liefert die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  in den ersten 60 s:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int_0^t \ddot{x}(t') dt' + \dot{x}(0) \\ &= \int_0^t \left( \frac{F_0}{-\frac{2}{3} \cdot t' + 100} - g \right) dt' \\ &= \frac{3}{2} F_0 \int_t^0 \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \cdot t' - 100} dt' - \int_0^t g dt' \\ &= \frac{3}{2} F_0 \left[ \ln \left| \frac{2}{3} \cdot t' - 100 \right| \right]_t^0 - gt \\ &= \frac{3}{2} F_0 \left( \ln 100 - \ln \left( 100 - \frac{2}{3} t \right) \right) - gt \\ &= \frac{3}{2} F_0 \ln \frac{100}{100 - \frac{2}{3} t} - gt \end{aligned}$$

Eine weitere Integration liefert uns die Höhe. Dabei berücksichtigen wir auch hier, dass zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{ s}$  die Höhe der Rakete  $x(0) = 0 \text{ m}$  beträgt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \dot{x}(t') dt' + x(0) \\ &= \int_0^t \left( \frac{3}{2} F_0 \left( \ln 100 - \ln \left( 100 - \frac{2}{3} t' \right) \right) - gt' \right) dt' \\ &\dots \\ &= \frac{3}{2} F_0 \left( t \ln 100 + \frac{3}{2} \left( 100 - \frac{2}{3} t \right) \left( \ln \left( 100 - \frac{2}{3} t \right) - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - 150 \left( \ln 100 - 1 \right) \right) - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

Nach einer Minute ist der Treibstoff verbraucht, und der Schub  $F_{\uparrow} = 0 \text{ N}$  bleibt ab diesem Zeitpunkt aus. Auf die Rakete wirkt nur noch die Gravitationskraft, sodass der Höhengewinn abnimmt und die Rakete nach Erreichen einer Maximalhöhe wieder zurück zur Erdoberfläche stürzt. Um die Geschwindigkeits- und Höhenfunktion für diese Flugphase zu berechnen, integrieren wir ein- bzw. zweimal Gl. (B.4) unter Berücksichtigung der Daten für die Endgeschwindigkeit und Endhöhe der ersten Flug-

phase:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t = 60^-) &:= \lim_{t' \nearrow 60} \dot{x}(t') \\ &= \lim_{t' \nearrow 60} \frac{3}{2} F_0 \ln \frac{100}{100 - \frac{2}{3} t'} - gt' \\ &= \dots = 166.23844 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t = 60^-) &:= \lim_{t' \nearrow 60} x(t') \\ &= \dots = 3038.5408 \text{ m} \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeit in der zweiten Flugphase integrieren wir Bewegungsgleichung (B.4). Dabei berücksichtigen wir den Anfangswert für die Geschwindigkeit  $\dot{x}(t = 60^+) := \dot{x}(t = 60^-)$ . Zur Einfachheit der Darstellung lassen wir die Einheiten bei den folgenden Rechnungen weg:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int_{60}^t \ddot{x}(t') dt' + \dot{x}(t = 60^+) \\ &= \int_{60}^t -g dt' + x(t = 60^-) = \int_t^{60} g dt + \dot{x}(t = 60^-) \\ &= g \cdot (60 - t) + \dot{x}(t = 60^-) = g \cdot (60 - t) + 166.23844 \end{aligned}$$

Eine weitere Integration liefert uns die Höhenfunktion der zweiten Flugphase, wobei als Anfangswert der Höhe in dieser antriebslosen Phase die Endhöhe der ersten Flugphase verwendet werden muss, d. h.  $x(t = 60^+) := x(t = 60^-)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{60}^t \dot{x}(t') dt' + x(t = 60^+) \\ &= \int_{60}^t (g \cdot (60 - t') + \dot{x}(t = 60^-)) dt' + x(t = 60^-) \\ &= \int_t^{60} g \cdot (t' - 60) dt' + \dot{x}(t = 60^-) \int_{60}^t dt' + x(t = 60^-) \\ &= \frac{1}{2} g [(t' - 60)^2]_t^{60} + \dot{x}(t = 60^-) \cdot (t - 60) + x(t = 60^-) \\ &= -\frac{1}{2} g (t - 60)^2 + \dot{x}(t = 60^-) \cdot (t - 60) + x(t = 60^-) \\ &= -\frac{1}{2} g (t - 60)^2 + 166.23844 \cdot (t - 60) + 3038.5408 \end{aligned}$$

Zu welchem Zeitpunkt erreicht die Rakete Ihre Maximalhöhe und welchen Wert hat die Maximalhöhe? Zur Beantwortung dieser Frage berechnen wir die Nullstelle der Geschwindigkeitsfunktion in der zweiten Flugphase:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow g \cdot (60 - t) + \dot{x}(t = 60^-) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\dot{x}(t=60^-)}{g} + 60 \\ &= 76.623844 \text{ s.} \end{aligned}$$



Etwa 1 min und 16.6 s nach der Zündung erreicht die Rakete ihre Maximalhöhe, deren Wert

$$x(76.623844) = 4420.3017 \text{ m}$$

beträgt. Nun zur Frage, weshalb die Rakete überhaupt abhebt, obwohl der maximale Schub von  $F_0 = 1000 \text{ N}$  gerade dazu ausreicht, die Gewichtskraft der voll aufgetankten Rakete der Startmasse von 100 kg zu kompensieren, so könnte diese Masse nicht durch die Verbrennung verringern, so könnte der Flugkörper nicht abheben. Da die Masse jedoch kleiner wird, übersteigt unmittelbar nach der Zündung bereits der Schub die Gewichtskraft, sodass die Rakete abhebt.

**7.3** Wir berechnen jeweils für den Gesamtenergieaufwand der beiden Maschinen:

$$\begin{aligned} W_1(T) &= \int_0^T P_1(t) dt = \int_0^{t_0} P_0 \cdot e^{-\lambda t} dt + \int_{t_0}^T \underbrace{P_0 \cdot e^{-\lambda t_0}}_{\text{konst.}} dt \\ &= \frac{P_0}{-\lambda} [e^{-\lambda t}]_0^{t_0} + P_0 e^{-\lambda t_0} [t]_{t_0}^T \\ &= \dots = P_0 \left( \frac{1}{\lambda} + \left( T - t_0 - \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda t_0} \right), \end{aligned}$$

$$W_2(T) = \int_0^T P_2 dt = P_2 \cdot [t]_0^T = P_2 \cdot T$$

Um die Frage zu beantworten, ab welcher Betriebszeit Maschine 1 sparsamer arbeitet als Maschine 2 (dies muss irgendwann einmal erfüllt sein, da ja wegen  $P_1(t_0) = P_0 \cdot e^{-\lambda t_0} = 10000 \text{ W} \cdot e^{-5} \approx 67.379 \text{ W} < P_2 = 100 \text{ W}$  nach  $t_0 = 5$  Stunden die Leistungsaufnahme von Maschine 1 unterhalb der von Maschine 2 liegt), setzen wir  $W_1(T) \leq W_2(T)$  und lösen nach der Betriebsdauer  $T$  auf:

$$\begin{aligned} W_1(T) &\leq W_2(T) \\ \Leftrightarrow P_0 \left( \frac{1}{\lambda} + \left( T - t_0 - \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda t_0} \right) &\leq P_2 \cdot T \\ \Leftrightarrow \frac{P_0}{\lambda} + T \cdot P_0 \cdot e^{-\lambda t_0} - \left( t_0 + \frac{1}{\lambda} \right) \cdot P_0 \cdot e^{-\lambda t_0} &- P_2 \cdot T \leq 0 \\ \Leftrightarrow T \underbrace{\left( P_0 \cdot e^{-\lambda t_0} - P_2 \right)}_{<0, \text{ (für o. g. Daten)}} &\leq \left( t_0 + \frac{1}{\lambda} \right) P_0 \cdot e^{-\lambda t_0} - \frac{P_0}{\lambda} \\ \Leftrightarrow T \geq \frac{\left( t_0 + \frac{1}{\lambda} \right) P_0 \cdot e^{-\lambda t_0} - \frac{P_0}{\lambda}}{P_0 \cdot e^{-\lambda t_0} - P_2} &= \frac{\left( t_0 + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda t_0} - \frac{1}{\lambda}}{e^{-\lambda t_0} - P_2/P_0} \end{aligned}$$

Mit  $\lambda = 1 \text{ h}^{-1}$ ,  $P_0 = 10 \text{ kW}$ ,  $P_2 = 100 \text{ W}$  und  $t_0 = 5 \text{ h}$  ergibt sich

$$T_{\min} \geq \frac{(5 + 1)e^{-5} - 1}{e^{-5} - \frac{100}{10000}} \approx 294.16209 \text{ h} \hat{=} 12 \text{ d } 6 \text{ h } 10 \text{ min.}$$

Dabei ist bis zu diesem Zeitpunkt von jeder Maschine die Energie

$$W_1(T_{\min}) = W_2(T_{\min}) = 100 \text{ W} \cdot 294.16209 \text{ h} = 29.416209 \text{ kWh}$$

verbraucht worden.

**7.4** Der Mittelwert der Funktion  $f(x)$  im Intervall  $[a, b]$  lautet

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

a) Damit gilt

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{T_0}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} (\sin(\omega t) + 1) dt \\ &= \dots = T_0 \left( \frac{\cos(\omega t_0) - \cos(\omega t_f)}{\omega(t_f - t_0)} + 1 \right). \end{aligned}$$

b)  $\bar{T} \approx 60.61 \text{ }^\circ\text{C}$  für  $t_f = 30 \text{ s}$  (1.5 Perioden),  $\bar{T} = 50 \text{ }^\circ\text{C}$  für  $t_f = 60 \text{ s}$  (3 Perioden).

**7.5** Für das Volumen eines Rotationskörpers mit Berandungsfunktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

a) Mit  $f : [0, \pi] : \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sin x$  folgt für das Volumenintegral  $V = \frac{\pi^2}{2} \approx 4.935$ .

b) Für  $R > 0$  beschreibt  $f : [-R, R] : \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  als Berandungsfunktion einen Halbkreis in der oberen Halbebene mit Radius  $R$ . Das Volumenintegral hat den Wert  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  und entspricht dem Volumen einer Kugel mit Radius  $R$ .

**7.6** Für die Mantelfläche eines Rotationskörpers mit Berandungsfunktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$M = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

a) Mit  $f : [0, \frac{2}{3}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3$  folgt für das Flächenintegral unter Verwendung der Substitution  $t = 1 + 9x^4$  der Wert  $M = \frac{98}{729}\pi \approx 0.4223$ .

b) Mit  $f : [0, \pi] : \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sin x$  ergibt sich zunächst das Einsetzen in die Mantelflächenformel das Integral  $M = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$ . Die Substitution von  $t := \cos x$  ergibt  $dt = -\sin x dx$ . Damit folgt zunächst  $M = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2} dt = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2} dt$ . Laut Hinweis ist  $\int \sqrt{ax^2 + c} dx = \frac{x}{2} \sqrt{ax^2 + c} + \frac{c}{2\sqrt{a}} \ln(\sqrt{ax^2 + c} + \sqrt{a}x)$ . Diese Situation liegt für das Integral mit  $a = 1 = c$  vor, woraus dann für das gesuchte Integral  $M = \pi(2\sqrt{2} + \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}) \approx 14.423$  folgt.

## Kapitel 8

### 8.1

- a) Für  $f(x) = \sin^2 x$  ist  $T_{f,6,0}(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6$ .
- b) Für  $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x + 9$  ist  $T_{f,5,1}(x) = 14 + 25(x-1) + 34(x-1)^2 + 17(x-1)^3 + 3(x-1)^4 = 3x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x + 9 = f(x)$ .
- c) Für  $f(x) = \frac{\exp(2x+1)}{2x+1}$  ist  $T_{f,2,0}(x) = e + 2ex^2$ .
- d)  $T_{\tan,4,0}(x) = x + \frac{x^3}{3}$
- e)  $T_{\exp,3,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \sum_{k=0}^3 \frac{x^k}{k!}$
- f)  $T_{\exp,3,1}(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 = e \sum_{k=0}^3 \frac{(x-1)^k}{k!} = eT_{\exp,3,0}(x-1)$

**8.2** Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion  $f$  mit  $f'(x) = f(-x)$  und  $f(0) = 1$  lautet das Taylor-Polynom vierter Ordnung um 0

$$T_{f,4,0} = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

Der Grenzwert der Taylor-Reihe von  $f$  um 0 ist  $\cos x + \sin x$ .

**8.3** Es gelte  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in I$ . Wir nehmen an,  $f$  wäre nicht streng monoton wachsend. Dann gibt es zwei Zahlen  $a, b \in I$  mit  $a < b$  aber  $f(a) \geq f(b)$ . Da  $I$  ein Intervall ist, liegt auch das Intervall  $[a, b]$  im Definitionsbereich von  $f$ . Nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung gibt es eine Zwischenstelle  $\zeta \in (a, b)$  mit

$$f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0,$$

denn der Nenner ist positiv, während für den Zähler  $f(b) - f(a) \leq 0$  gilt. Also folgt  $f'(\zeta) \leq 0$  im Widerspruch zu  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in I$ .

Im analoger Weise kann von  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in I$  auf die streng fallende Monotonie von  $f$  geschlossen werden.

**8.4** Die Koeffizienten der Fourier-Reihe der Sägezahnsschwingung lauten

$$a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}, \quad k \geq 1.$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = 2 \sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{1}{2} \sin(4x) + \dots$$

**8.5** Die Fourier-Reihe von  $f(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$  ist eine endliche Summe und lautet  $\frac{1}{2}e^{-2ix} - \frac{1}{2}e^{2ix} = \sin(2x)$ . Die Fourier-Reihe von  $g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$  ist eine endliche Summe und lautet  $\frac{1}{2}e^{-2ix} + \frac{1}{2}e^{2ix} = \cos(2x)$ . Da beide Reihen endliche Summen sind, gilt sogar

$$2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x),$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x).$$

Diese Darstellungen ergeben sich auch aus den Additionstheoremen.

## Kapitel 9

**9.1** Die Stärke der Gesamtkraft ist

$$|\mathbf{F}_g| = g \cdot m = 196.20 \text{ kN}$$

und daraus ergeben sich Hangabtriebskraft und Normalenkraft als

$$|\mathbf{F}_N| = |\mathbf{F}_G| \cdot \cos(30^\circ) = 169.91 \text{ kN}$$

$$|\mathbf{F}_H| = |\mathbf{F}_G| \cdot \sin(30^\circ) = 98.10 \text{ kN}.$$

**9.2** Es ist

$$40 \text{ kN} = |\mathbf{F}_H| = |\mathbf{F}_G| \cdot \sin(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |\mathbf{F}_G|,$$

also ist

$$m \cdot g = |\mathbf{F}_G| = \frac{80}{\sqrt{3}} = 46.19 \text{ kN}$$

und damit

$$m = 4.708 \text{ kg}.$$

**9.3** Wir identifizieren die Linie  $L$  mit der  $x$ -Achse und den Angriffspunkt der Kräfte mit  $(0, 0)$ . Dann ist

$$\mathbf{F}_1 = 15 \cdot \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = 10 \cdot \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) \end{pmatrix},$$

also gilt für die Gesamtkraft

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 20.06 \\ 0.43 \end{pmatrix}$$

und daher ist der gesuchte Winkel

$$\alpha = \arccos(0.9998) = 1.23^\circ.$$

**9.4** Es muss gelten

$$\frac{|\mathbf{F}_1|}{\sin(15^\circ)} = \frac{|\mathbf{F}_2|}{\sin(30^\circ)},$$

also

$$|\mathbf{F}_2| = \sin(30^\circ) \cdot \frac{|\mathbf{F}_1|}{\sin(15^\circ)} = 193.219 \text{ N}.$$

**9.5** Wir können annehmen, dass beide Vektoren vom Nullvektor verschieden sind (andernfalls sind beide Aussagen erfüllt).

Falls  $\lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$  und z. B.  $\lambda \neq 0$ , so ist

$$\mathbf{v} = -\frac{\mu}{\lambda} \cdot \mathbf{w},$$

also sind  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  kollinear.

Falls  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  kollinear sind, stimmen in der Polarkoordinatendarstellung entweder ihre Winkel überein oder unterscheiden sich um  $180^\circ$ . In beiden Fällen gibt es ein  $r \in \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{v} = r \cdot \mathbf{w}$ , also gilt  $\mathbf{v} + (-r) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$ .

9.6 Es ist

$$\mathbf{u} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(150^\circ) \\ \sin(150^\circ) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{w} = \sqrt{8} \cdot \begin{pmatrix} \cos(225^\circ) \\ \sin(225^\circ) \end{pmatrix}.$$

9.7 Der Winkel ist  $\alpha = \arccos\left(\frac{-2\sqrt{3}-2}{2 \cdot 2\sqrt{2}}\right) = 165^\circ$ , und es ist

$$\mathbf{v}_w = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.8 Der Winkel ist  $\alpha = \arccos\left(\frac{14}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}}\right) = 8.13^\circ$ , und es ist

$$\mathbf{v}_w = \frac{7}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_w^\perp = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.9 Da  $\mathbf{v}'$  und  $\mathbf{w}$  kollinear sind, gilt  $\mathbf{v}' = r \cdot \mathbf{w}$  für ein  $r \in \mathbb{R}$ . Damit gilt nach Gl. (9.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_w &= \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{w}|^2} \cdot \mathbf{w} = \frac{\langle \mathbf{v}' + \mathbf{v}'', \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{w}|^2} \cdot \mathbf{w} \\ &= \frac{\langle \mathbf{v}', \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{w}|^2} \cdot \mathbf{w} + \frac{\langle \mathbf{v}'', \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{w}|^2} \cdot \mathbf{w} \\ &= \frac{\langle \mathbf{v}', \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{w}|^2} \cdot \mathbf{w} \\ &= \frac{\langle r \cdot \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{w}|^2} \cdot \mathbf{w} \\ &= \frac{r \cdot |\mathbf{w}|^2}{|\mathbf{w}|^2} \cdot \mathbf{w} = r \cdot \mathbf{w} \\ &= \mathbf{v}' \end{aligned}$$

wobei wir schon ausgenutzt haben, dass  $\mathbf{v}''$  senkrecht auf  $\mathbf{w}$  steht. Damit gilt auch

$$\mathbf{v}_w^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_w = \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{v}''.$$

9.10 Eine komplexe Zahl  $z$  liegt

1. im ersten Quadranten, wenn  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  und  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ ,
2. im zweiten Quadranten, wenn  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$  und  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ ,
3. im dritten Quadranten, wenn  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$  und  $\operatorname{Im}(z) \leq 0$ ,
4. im vierten Quadranten, wenn  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  und  $\operatorname{Im}(z) \leq 0$ .

9.11 Es ist

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= -12 - 5i \\ z_1 : z_2 &= -i. \end{aligned}$$

9.12 Es ist

$$z_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(150^\circ) \\ \sin(150^\circ) \end{pmatrix}$$

$$z_2 = 5 \cdot \begin{pmatrix} \cos(233.13^\circ) \\ \sin(233.13^\circ) \end{pmatrix}.$$

9.13 Die achten Einheitswurzeln sind

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, & \zeta_2 &= i, \\ \zeta_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, & \zeta_4 &= -1, \\ \zeta_5 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, & \zeta_6 &= -i, \\ \zeta_7 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, & \zeta_8 &= 1. \end{aligned}$$

9.14 Es ist  $z = 3\sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{7\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{7\pi}{4}))$ , und damit gilt

$$\begin{aligned} z^2 &= 18 \cdot (\cos(\frac{3\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{2})) = 18i \\ z^3 &= 54\sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{5\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{5\pi}{4})) = -54 - 54i \\ z^4 &= 324 \cdot (\cos(7\pi) + i \cdot \sin(7\pi)) = -324. \end{aligned}$$

9.15 Es ist  $z = \sqrt{2^5} \cdot (\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{4}))$ , und damit sind die vier vierten Wurzeln von  $z$  gleich

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\sqrt[8]{2^5}}{2} \cdot \left( \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}} + i \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \right) \\ \eta_2 &= \frac{\sqrt[8]{2^5}}{2} \cdot \left( -\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}} + i \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \right) \\ \eta_3 &= \frac{\sqrt[8]{2^5}}{2} \cdot \left( -\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}} - i \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \right) \\ \eta_4 &= \frac{\sqrt[8]{2^5}}{2} \cdot \left( \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}} - i \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \right). \end{aligned}$$

9.16 Die Gleichung hat die Lösungen

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i.$$

9.17 Die Gleichung hat die Lösungen

$$z_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, \quad z_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i.$$

9.18 Die Gleichung hat die Lösungen

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -1 - i.$$

9.19 Es ist

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

9.20 Es ist

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| &= \sqrt{29} \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{11} \\ |\mathbf{w}| &= 6. \end{aligned}$$

9.21 Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} 28 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 23 \end{pmatrix} \\ \mathbf{d} &= \begin{pmatrix} 21 \\ 31 \\ 71 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| &= \sqrt{834} \\ |\mathbf{b}| &= 5\sqrt{5} \\ |\mathbf{c}| &= 15\sqrt{3} \\ |\mathbf{d}| &= \sqrt{6443}. \end{aligned}$$

9.22 Es ist

$$\mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{F}_g| = \sqrt{29}$$

9.23 Es ist  $T = (1, 3, 3)$ .

9.24 Es ist  $Q = (15, -1, 13)$ .

9.25 Der Teilungspunkt  $T$  ist der Punkt mit dem Ortsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(T) &= \mathbf{r}(P) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= \mathbf{r}(P) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (\mathbf{r}(Q) - \mathbf{r}(P)) \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \mathbf{r}(P) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \mathbf{r}(Q). \end{aligned}$$

und das ist gerade die Definition des Massenschwerpunktes von  $P$  und  $Q$ .

9.26 Es ist  $S = (4, 4, 3)$ .

9.27 Es ist  $S_1 = (4, 3, 5)$ ,  $S_2 = (6, 7, 3)$  und der Massenschwerpunkt des Gesamtsystems ist  $S = (5, 5, 4)$ .

9.28 Wir bezeichnen mit  $A$  den Massenschwerpunkt des Systems  $S_1, \dots, S_k$  mit Massen  $m_1, \dots, m_k$  und mit  $B$  den Massen-

schwerpunkt aller Einzelpunkte. Dann gilt

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{m_1 + \dots + m_k} \cdot (m_1 \cdot \mathbf{r}(S_1) + \dots + m_k \cdot \mathbf{r}(S_k)) \\ &= \frac{1}{\sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^{n_l} m_{i,k}} \cdot \left( m_1 \cdot \frac{1}{m_1} (m_{1,1} \cdot \mathbf{r}(P_{1,1}) + \dots + m_{1,n_1} \cdot \mathbf{r}(P_{1,n_1})) \right. \\ &\quad \left. + \dots + m_k \cdot \frac{1}{m_k} (m_{k,1} \cdot \mathbf{r}(P_{k,1}) + \dots + m_{k,n_k} \cdot \mathbf{r}(P_{k,n_k})) \right) \\ &= \frac{1}{\sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^{n_l} m_{i,k}} \cdot \left( \sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^{n_l} \mathbf{r}(P_{l,i}) \right) \\ &= B. \end{aligned}$$

## Kapitel 10

10.1 Es ist  $\alpha = \arccos\left(\frac{10}{7\sqrt{10}}\right) \approx 63.14^\circ$ .

10.2 Für  $\mathbf{v}$  gilt

$$\alpha_x \approx 54.74^\circ, \quad \alpha_y \approx 125.26^\circ, \quad \alpha_z \approx 54.74^\circ,$$

und für  $\mathbf{u}$  gilt

$$\alpha_x = 45^\circ, \quad \alpha_y \approx 114.10^\circ, \quad \alpha_z \approx 125.26^\circ.$$

Der Winkel zwischen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{u}$  ist

$$\alpha \approx 71.90^\circ.$$

10.3 Es gilt

$$\begin{aligned} |\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &= |\mathbf{v}|^2 + 2 \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + |\mathbf{w}|^2. \end{aligned}$$

Da  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ , folgt hieraus die Behauptung.

10.4 Es gilt

$$\begin{aligned} |\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &= |\mathbf{v}|^2 + 2 \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + |\mathbf{w}|^2. \end{aligned}$$

Da  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  genau dann parallel sind, wenn  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|$ , folgt hieraus nach der ersten binomischen Formel die Behauptung.

10.5

- Die Aussage ist falsch, z. B. für  $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{e}_1$ .
- Die Aussage ist richtig, vergleiche dazu die Ausführungen in der Lösung zu Aufgabe 10.3 oder 10.4.
- Die Aussage ist falsch, z. B. für  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{e}_2$ .

**10.6** Bezeichnet  $\alpha$  den gesuchten Winkel, so gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$|\mathbf{F}_G| = |\mathbf{F}| \cdot \cos(\alpha).$$

Damit erhalten wir die Gleichung

$$900 = 200 \cdot \cos(\alpha) \cdot 8,$$

und es folgt

$$\alpha = \arccos\left(\frac{9}{16}\right) = 55.77^\circ.$$

**10.7** Es ist

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}] = 26$ .

**10.8** Es ist  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0$ , also sind die Vektoren komplanar. Alternativ gilt auch

$$\mathbf{w} = 3 \cdot \mathbf{u} - 2 \cdot \mathbf{v},$$

also liegt  $\mathbf{w}$  schon in der von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  aufgespannten Ebene.

**10.9** Das Parallelepiped wird erzeugt von den Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für sein Volumen

$$V = |[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]| = 10.$$

**10.10** Das Parallelepiped hat das Volumen

$$V = |[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]| = 6.$$

**10.11**

a) Die Aussage ist richtig, denn

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

b) Die Aussage ist richtig, denn

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} - \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{v}.$$

c) Die Aussage ist falsch, wie man an den Vektoren  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  sehen kann.

**10.12** Da der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist, ist  $\mathbf{L}$  in jedem Punkt gleich, und kann daher aus einem beliebigen Punkt der Bewegungsbahn ermittelt werden, z. B. dem Punkt  $(2, 0, 0)$ .

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times 5.00 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

**10.13** Aus der Gleichung

$$F_L = |\mathbf{F}_L| = |q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})| = q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\alpha),$$

wobei  $\alpha$  den gesuchten Winkel bezeichnet, erhalten wir

$$\sin(\alpha) = \frac{F_L}{q \cdot v \cdot B} = \frac{1.5 \cdot 10^{-16}}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 5.00 \cdot 10^6 \cdot 6.00 \cdot 10^{-4}} = 0.3121$$

und damit

$$\alpha = 18.2^\circ \quad \text{oder} \quad \alpha = 161.8^\circ.$$

**10.14** Es ist  $d(P, Q) = 2 \cdot \sqrt{2}$ .

**10.15** Es ist  $d(P, G) = \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{5}} \approx 4.22$ .

**10.16** Es ist  $d(P, G) = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{14}} \approx 4.82$ .

**10.17** Die beiden Geraden sind nicht parallel, da  $\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  nicht kollinear sind. Die Geraden sind windschief, da  $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1] \neq 0$ . Es ist

$$d(G_1, G_2) = \frac{10}{2 \cdot \sqrt{2}}.$$

**10.18** Die beiden Geraden sind parallel, da  $\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  kollinear sind ( $\mathbf{g}_2 = (-2) \cdot \mathbf{g}_1$ ). Es ist

$$d(G_1, G_2) = \frac{5 \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{6}}.$$

**10.19** Ist  $\mathbf{s}$  der Ortsvektor des Schnittpunktes  $S$ , so ist  $\mathbf{s}$  ein Stützvektor sowohl für  $G_1$  als auch für  $G_2$ . Damit ist klar, dass  $\alpha$  der Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren  $\mathbf{g}_1$  und  $\mathbf{g}_2$  ist, also

$$\cos(\alpha) = \frac{|\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle|}{|\mathbf{g}_1| \cdot |\mathbf{g}_2|}.$$

**10.20** Die Ebene hat den Normalenvektor  $\mathbf{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$  und damit ist

$$d(P, E) = \frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

**10.21** Die Ebene hat den Normalenvektor  $\mathbf{n}_E = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$  und damit ist

$$d(P, E) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**10.22** Die Ebene hat den Normalenvektor  $\mathbf{n}_E = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$  und die Gerade hat den Richtungsvektor  $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ , also ist  $\langle \mathbf{n}_E, \mathbf{g} \rangle = 0$ , und damit ist die Gerade parallel zur Ebene und

$$d(G, E) = 0.$$

Die Gerade ist also schon in der Ebene enthalten.

**10.23** Die Ebene hat den Normalenvektor  $\mathbf{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$  und die Gerade hat den Richtungsvektor  $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ , also ist  $\langle \mathbf{n}_E, \mathbf{g} \rangle = 0$ , und damit ist die Gerade parallel zur Ebene und

$$d(G, E) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

**10.24**

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**10.25** Da  $S$  auf  $G$  liegt, gibt es ein  $r \in \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{r}(S) = s_2 + r \cdot \mathbf{g}$ . Da  $S$  auch auf  $E$  liegt, haben wir

$$\langle \mathbf{n}_E, s_1 \rangle = \langle \mathbf{n}_E, \mathbf{r}(S) \rangle = \langle \mathbf{n}_E, s_2 \rangle + r \cdot \langle \mathbf{n}_E, \mathbf{g} \rangle.$$

Also gilt

$$r = \frac{\langle \mathbf{n}_E, s_1 \rangle - \langle \mathbf{n}_E, s_2 \rangle}{\langle \mathbf{n}_E, \mathbf{g} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{n}_E, s_1 - s_2 \rangle}{\langle \mathbf{n}_E, \mathbf{g} \rangle}.$$

wie gewünscht.

**10.26** Wir bezeichnen mit  $P$  den Endpunkt von  $\mathbf{r}(S) + \mathbf{g}$  und mit  $Q$  den Fußpunkt des Lotes von  $P$  auf  $E$ . Dann ist  $\alpha$  in dem rechtwinkligen Dreieck mit den Ecken  $S$ ,  $P$  und  $Q$  der Winkel beim Punkt  $S$ . Damit ist

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{SP}} = \frac{\langle \mathbf{n}_E, \mathbf{g} \rangle}{|\mathbf{n}_E| \cdot |\mathbf{g}|}.$$

## Kapitel 11

**11.1** Die Menge  $V$  ist ein Untervektorraum, denn die drei Untervektorraumaxiome sind erfüllt, wie man leicht nachrechnet.

**11.2** Es ist  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$  (für  $t = 1$ ), aber nicht  $2 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , denn aufgrund der ersten Komponente müsste  $t = 2$  gelten, aber dann müsste die zweite Komponente  $2^2 = 4$  sein.

**11.3** Die Menge  $V$  ist ein Untervektorraum, denn die drei Untervektorraumaxiome sind erfüllt, wie man leicht nachrechnet.

**11.4** Aus  $r_1 \cdot \mathbf{v}_1 + r_2 \cdot \mathbf{v}_2 + r_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$  folgt  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ , wie man leicht nachrechnet.

**11.5** Es ist  $2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ , also sind die Vektoren linear abhängig.

**11.6** Aus  $r_1 \cdot \mathbf{v}_1 + r_2 \cdot \mathbf{v}_2 + r_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$  folgt  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ , wie man leicht nachrechnet. Damit sind  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  linear unabhängig. Drei linear unabhängige Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  bilden aber schon eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ .

**11.7** Man rechnet leicht nach, dass gilt:

1. Sind  $r, s \in \mathbb{R}$  beliebig, so erfüllt  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \cdot \mathbf{v}_1 + s \cdot \mathbf{v}_2$  die

Gleichung  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ .

2. Erfüllen  $x_1, x_2, x_3$  die Gleichung  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ , so ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (-x_2) \cdot \mathbf{v}_1 + x_3 \cdot \mathbf{v}_2.$$

Das beweist die Gleichheit.

**11.8** Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren an und erhalten zunächst die paarweise orthogonalen Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und, nach Normierung, die Orthonormalbasis

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{950}} \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

**11.9** Eine einfache Rechnung zeigt, dass  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  und  $\mathbf{v}_3$  linear unabhängig sind, und daher bilden sie eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ . Auf diesen Vektoren wenden wir das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren an und erhalten zunächst die

paarweise orthogonalen Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und, nach Normierung, die Orthonormalbasis

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**11.10** Wir machen den Ansatz

$$0 = r \cdot v_1 + s \cdot v_2$$

mit  $r, s \in \mathbb{R}$  und haben zu zeigen, dass  $r = s = 0$ . Es gilt

$$0 = \langle 0, v \rangle = \langle r \cdot v_1, v_1 \rangle + \langle s \cdot v_2, v_1 \rangle = r \cdot |v_1|,$$

woraus folgt, dass  $r = 0$  (da  $|v_1| \neq 0$ ). Genauso zeigt man  $s = 0$ , und dieser Beweis verallgemeinert sich sofort auf  $n$  Vektoren.

**11.11** Wir ergänzen  $v_1, v_2$  durch

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis von  $\mathbb{R}^4$  und orthonormalisieren diese Basis mit dem Gram-Schmidt-Verfahren:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren  $w_1$  und  $w_2$  bilden nun eine Orthonormalbasis von  $U$  und die Vektoren  $w_3$  und  $w_4$  bilden eine Orthonormalbasis von  $U^\perp$ .

**11.12** Das ist klar, denn  $\langle n_E, v \rangle = 0$  für alle  $v \in E$ .

**11.13** Wähle eine beliebige Basis  $u_1, \dots, u_l$  von  $U$  und ergänze durch  $u_{l+1}, \dots, u_n$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}^n$ . Wende das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren an und erhalte eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  von  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $v_1, \dots, v_l$  eine Orthonormalbasis von  $U$  ist und  $v_{l+1}, \dots, v_n$  eine von  $U^\perp$ . Insbesondere gilt also

$$\dim(U^\perp) = n - l.$$

**11.14** Die Vektorraumaxiome können genauso nachgerechnet werden wie im Beispiel  $V = \text{Abb}([a, b], \mathbb{R})$ .

**11.15** Wir machen den Ansatz  $r \cdot f + s \cdot g = 0$  und haben zu zeigen, dass  $r = s = 0$ .

Die Gleichung  $r \cdot f + s \cdot g = 0$  im Vektorraum  $V$  bedeutet, dass  $r \cdot \cos(x) + s \cdot \sin(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Setzen wir speziell  $x = 0$  ein, so erhalten wir  $r \cdot 1 + 0 = 0$ , also  $r = 0$ , und setzen wir  $x = \frac{\pi}{2}$  ein, so ergibt sich  $0 + s \cdot 1 = 0$ , also  $s = 0$ . Damit ist die lineare Unabhängigkeit gezeigt.

**11.16** Wir machen den Ansatz  $r \cdot f + s \cdot g = 0$  und haben zu zeigen, dass  $r = s = 0$ .

Die Gleichung  $r \cdot f + s \cdot g = 0$  im Vektorraum  $V$  bedeutet, dass  $r \cdot \exp(x) + s \cdot \ln(x) = 0$  für alle  $x \in (0, \infty)$ . Setzen wir speziell  $x = 1$  ein, so erhalten wir  $r \cdot e^1 + 0 = 0$ , also  $r = 0$ , und setzen wir  $x = 2$  ein, so ergibt sich  $0 \cdot e^2 + s \cdot \ln(2) = 0$  (da ja bereits  $r = 0$ ), also  $s = 0$ . Damit ist die lineare Unabhängigkeit gezeigt.

**11.17** Es ist  $x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$ , und deshalb können wir Partialbruchzerlegung durchführen und erhalten

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1}$$

für alle  $x \in (1, \infty)$ , und damit

$$h - \frac{1}{2} \cdot f - \frac{1}{2} \cdot g = 0.$$

Also sind die drei Funktionen nicht linear unabhängig.

**11.18** Wir schreiben  $E_1 = o_1 + \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_2$  und  $E_2 = o_2 + \lambda \cdot q_1 + \mu \cdot q_2$ . Da  $E_1$  parallel zu  $E_2$  ist, gibt es  $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$  mit  $p_1 = r_1 \cdot q_1 + s_1 \cdot q_2$  und  $p_2 = r_2 \cdot q_1 + s_2 \cdot q_2$ . Die Vektoren  $p_1$  und  $p_2$  sind also in dem von  $q_1$  und  $q_2$  erzeugten Untervektorraum  $U \subset \mathbb{R}^3$ , der die Dimension 2 hat, da  $q_1$  und  $q_2$  nach Voraussetzung nicht kollinear sind, also eine Basis von  $U$  bilden. Aber auch  $p_1$  und  $p_2$  sind linear unabhängig, und daher bilden Sie nach dem Austauschsatz von Steinitz ebenfalls eine Basis von  $U$ . Deshalb gibt es  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  mit  $q_1 = a_1 \cdot p_1 + b_1 \cdot p_2$  und  $q_2 = a_2 \cdot p_1 + b_2 \cdot p_2$ . Folglich ist auch  $E_2$  parallel zu  $E_1$ .

**11.19** Die Menge  $U$  ist nicht leer, da die Nullfunktion die Bedingung erfüllt. Die anderen Untervektorraumaxiome lassen sich leicht nachrechnen, da für (zweimal) stetig differenzierbare Funktionen  $f$  und  $g$  und für  $r, s \in \mathbb{R}$  gilt

$$(r \cdot f + s \cdot g)'(x) = rf'(x) + sg'(x)$$

$$(r \cdot f + s \cdot g)''(x) = rf''(x) + sg''(x).$$

## Kapitel 12

**12.1** Die allgemeine Lösung hat die Form

$$x_1 = -r, \quad x_2 = -3r, \quad x_3 = 2r, \quad x_4 = r$$

mit einem Parameter  $r \in \mathbb{R}$ .

**12.2** Die allgemeine Lösung hat die Form

$$x_1 = 5r, \quad x_2 = -4r, \quad x_3 = 12r, \quad x_4 = 19r$$

mit einem Parameter  $r \in \mathbb{R}$ .

**12.3** Das Gleichungssystem ist lösbar und die allgemeine Lösung hat die Form

$$x_1 = \frac{r+2}{3}, \quad x_2 = \frac{-4r+4}{9}, \quad x_3 = \frac{4r+5}{9}, \quad x_4 = r$$

mit einem Parameter  $r \in \mathbb{R}$ .

**12.4** Das Gleichungssystem ist lösbar und hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{3}{8}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}.$$

**12.5** Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar für  $c \neq -\frac{3}{2}$  und hat in diesem Fall die eindeutige Lösung

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{c+1}{2c+3}, \quad x_3 = -\frac{3c+6}{4c+6}, \quad x_4 = \frac{3c+4}{4c+6}$$

**12.6** Das Gleichungssystem ist nicht lösbar für  $a = 0$  und für  $a = 10$ . In allen anderen Fällen hat es die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{4a^2 + 74a - 6}{a \cdot (a - 10)}, \quad x_2 = \frac{-3a^2 - 53a + 4}{a \cdot (a - 10)},$$

$$x_3 = \frac{24a - 2}{a \cdot (a - 10)}, \quad x_4 = -\frac{7}{a - 10}.$$

**12.7** Es ist

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \pi \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \pi & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Dabei ist  $A$  nicht symmetrisch und  $B$  ist symmetrisch.

**12.8**

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**12.9** Die Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

und die augmentierte Matrix ist

$$(A|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & 3 \end{array} \right).$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

**12.10** Die augmentierte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems ist

$$(A|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = -\frac{5}{35}, \quad x_2 = -\frac{101}{35}, \quad x_3 = \frac{29}{35}, \quad x_4 = \frac{73}{35}.$$

**12.11** Die augmentierte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems ist

$$(A|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 5 & 9 & -9 & 11 & -9 \\ 1 & 2 & 4 & -4 & 4 & -7 \\ -1 & -4 & -5 & 4 & -12 & 5 \\ -2 & -5 & -7 & 6 & -13 & 8 \end{array} \right).$$

Die reduzierte Normalform des Systems ist

$$B = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -17 \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen

$$x_1 = 2r + 1, \quad x_2 = -3r + 14, \quad x_3 = -2r - 26,$$

$$x_4 = -2r - 17, \quad x_5 = r.$$

**12.12** Die augmentierte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems ist

$$(A|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} i & 1+i & 1-i & 2 \\ 2 & 0 & 3i & 1+2i \\ 0 & i & 1 & 3i \end{array} \right).$$

Die reduzierte Normalform des Systems ist

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3+i \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \cdot i \end{array} \right)$$

und damit erhalten wir die eindeutige Lösung

$$x_1 = -3 + i, \quad x_2 = \frac{16}{3}, \quad x_3 = -\frac{7}{3} \cdot i.$$

**12.13** Das System hat keine Lösung für  $a = -\frac{3}{2} \cdot i$ . In allen anderen Fällen hat das System eine eindeutige Lösung. Setzen wir dazu

$$r = \frac{6 - 2 \cdot i + 4a - a \cdot i}{(2a + 3) \cdot (i + 1)}$$

so ist diese Lösung gegeben durch

$$x_1 = 0, \quad x_2 = i - 2 + (1 + i) \cdot r,$$

$$x_3 = i - 4 + (1 + 2 \cdot i) \cdot r, \quad x_4 = r.$$



**12.14** Es ist

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 14 & -5 & -3 \\ 30 & -7 & -5 \end{pmatrix}, \quad B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ -9 & -10 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

**12.15** Es ist

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A+B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**12.16** Es ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -8i & -3 + 4i \\ 3 + 27i & 5 - 8i & 7 - 6i \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 17 - i & -9 + 18i \\ -15 + 7i & 1 - 15i \\ -7 - 3i & 4 - 8i \end{pmatrix}.$$

**12.17**

a)  $A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

b)  $B \cdot A$  ist nicht definiert.

c)  $B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$

d)  $B^T \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}.$

e)  $B^T + C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$

**12.18** Entsteht  $B$  aus  $A$  durch Addition des  $\lambda$ -fachen der ersten Zeile zur zweiten, ist  $r = \text{Rang}(A)$ , und ist  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$  eine Basis von  $\text{Bild}(A)$ , so ist  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$  mit  $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + \lambda \cdot a_{i,1} \cdot \mathbf{e}_2$  (wobei  $a_{i,1}$  die erste Komponente von  $\mathbf{a}_i$  bezeichnet) eine Basis von  $\text{Bild}(B)$ , also gilt  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B)$ .

**12.19** Es ist

$$\text{Rang}(A) = 2, \quad \text{Nul}(A) = 1, \quad \text{Rang}(B) = 3, \quad \text{Nul}(B) = 1.$$

**12.20** Eine Basis von  $\text{Bild}(A)$  ist  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Daher ist  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  lösbar für alle Vektoren  $\mathbf{b}$  von der Form  $\mathbf{b} = r \cdot \mathbf{b}_1 + s \cdot \mathbf{b}_2$  ( $r, s \in \mathbb{R}$ ).

**12.21** Eine Basis von  $\text{Bild}(A)$  ist  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

und eine Basis von  $\text{ker}(A)$  ist  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**12.22** Wegen  $\text{Nul}(A) = 0$  ist nach dem Rangsatz  $\text{Rang}(A) = n$ , also  $\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$ . Damit ist  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  für jedes  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  lösbar. Sind  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  zwei Lösungen, so ist  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \text{Kern}(A)$ , und damit ist (wegen  $\text{Nul}(A) = 0$ ) schon  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

**12.23** Da  $\text{Rang}(A) = 2$  erzeugen die Zeilen  $\mathbf{a}_{(1)}$  und  $\mathbf{a}_{(2)}$  den Zeilenraum, insbesondere also  $\mathbf{a}_{(3)}$ , die dritte Zeile von  $A$ . Ein  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  ist bekanntlich dann in  $\text{ker}(A)$ , wenn  $\langle \mathbf{a}_{(i)}, \mathbf{x} \rangle = 0$  für  $i = 1, 2, 3$ , also hier für  $i = 1, 2$  (da die dritte Zeile von den ersten beiden linear abhängig ist). Der Raum der Vektoren, die senkrecht auf  $\mathbf{a}_{(1)}$  und  $\mathbf{a}_{(2)}$  stehen, wird aber von  $\mathbf{a}_{(1)} \times \mathbf{a}_{(2)}$  erzeugt.

## Kapitel 13

**13.1** Es ist  $\det(A_1) = 8$ ,  $\det(A_2) = 0$ ,  $\det(A_3) = 13$  und  $\det(A_4) = -6$ .

**13.2** Ganz allgemein gilt für  $2 \times 2$ -Matrizen  $A = (a_{ij})$  und  $B = (b_{ij})$ , dass

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= (a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1}) \cdot (a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2}) \\ &\quad - (a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2}) \cdot (a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1}) \\ &= a_{1,1}b_{1,1}a_{2,1}b_{1,2} + a_{1,1}b_{1,1}a_{2,2}b_{2,2} \\ &\quad + a_{1,2}b_{2,1}a_{2,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,1}a_{2,2}b_{2,2} \\ &\quad - a_{1,1}b_{1,2}a_{2,1}b_{1,1} - a_{1,1}b_{1,2}a_{2,2}b_{2,1} \\ &\quad - a_{1,2}b_{2,2}a_{2,1}b_{1,1} - a_{1,2}b_{2,2}a_{2,2}b_{2,1} \\ &= a_{1,1}b_{1,1}a_{2,2}b_{2,2} + a_{1,2}b_{2,1}a_{2,1}b_{1,2} \\ &\quad - a_{1,1}b_{1,2}a_{2,2}b_{2,1} - a_{1,2}b_{2,2}a_{2,1}b_{1,1} \\ &= (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}) \cdot (b_{1,1}b_{2,2} - b_{1,2}b_{2,1}) \\ &= \det A \cdot \det B. \end{aligned}$$

**13.3** Es ist

$$\det A = -4, \quad x_1 = \frac{10}{4}, \quad x_2 = \frac{2}{4}$$

**13.4** Es ist  $\det(A) = -5$ , und daher hat jedes Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix  $A$  nach der cramerschen Regel eine eindeutige Lösung, hier  $x_1 = 3, x_2 = -2$ .

**13.5** Es ist  $\det(A) = 2a - 4$ , und damit hat  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  nach der cramerschen Regel genau dann eine eindeutige Lösung für alle  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ , wenn  $a \neq 2$ .

**13.6** Allgemein ist  $\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$ , und daher ist  $\det(A) = -a_{1,2} \cdot a_{2,1}$  genau dann, wenn  $a_{1,1} \cdot a_{2,2} = 0$ , also wenn  $a_{1,1} = 0$  oder  $a_{2,2} = 0$ .

**13.7** Allgemein ist  $\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$ . Falls also  $\det A = 0$ , so gilt  $a_{1,1} \cdot a_{2,2} = a_{1,2} \cdot a_{2,1}$ . Ist also die erste Zeile nicht die Nullzeile, so ist die zweite ein Vielfaches von ihr. Ist die erste Zeile die Nullzeile, so ist sie das Nullfache der zweiten.

**13.8** Es ist  $\det A = 42$ ,  $\det B = -60$  und  $\det(C) = 14$ .

**13.9** Es ist

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{2,2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{2,3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und  $\det(A_{1,1}) = 2$ ,  $\det(A_{1,2}) = -1$ ,  $\det(A_{1,3}) = -3$ ,  $\det(A_{2,1}) = 1$ ,  $\det(A_{2,2}) = 1$ ,  $\det(A_{2,3}) = -3$  und  $\det A = 3$ .

**13.10** Es ist  $\det A = 50 \neq 0$ , und daher hat das Gleichungssystem nach der cramerschen Regel für jedes  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  eine eindeutige Lösung.

**13.11** Die Aussage folgt aus dem Schema von Sarrus (oder der definierenden Formel), da in diesem Fall alle anderen Term, die in der Determinante auftauchen entweder  $a_{1,1}$  oder  $a_{1,2}$  oder  $a_{2,1}$  enthalten, also 0 sind.

**13.12** Da die Determinante einer Matrix mit dem Spatprodukt der drei Spaltenvektoren übereinstimmt, folgt diese Aussage aus der entsprechenden Aussage für Spatprodukte (vergleiche Abschn. 10.2).

**13.13** Es ist  $\det A = 1$ ,  $\det B = 270$ ,  $\det C = -386$  und  $\det D = 451$ .

**13.14** Diese Determinante wird am besten berechnet, indem wir  $A$  auf obere Dreiecksform bringen. Es ist  $\det A = -780$ .

**13.15** Das folgt durch Induktion nach  $n_1$  und Entwicklung nach der ersten Spalte.

**13.16** Es ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 8 & -8 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 24 & -24 & 8 & 0 \\ 0 & 12 & -16 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

**13.17** Die Formel folgt induktiv durch Entwicklung nach der ersten Spalte.

Für  $n = 2$  kann die Formel sofort nachgerechnet werden.

Für den Induktionsschluss  $n \rightarrow n + 1$  beachten Sie zunächst, dass die Matrix  $V(r_1, \dots, r_{n+1})$  durch Subtraktion der  $r_1$ -fachen der  $n$ -ten Spalte von der  $(n + 1)$ -ten, des  $r_1$ -fachen der  $(n - 1)$ -ten Spalte von der  $n$ -ten usw. übergeht in die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & r_2 - r_1 & r_2^2 - r_1 r_2 & \dots & r_2^n - r_1 r_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_{n+1} - r_1 & r_{n+1}^2 - r_1 r_{n+1} & \dots & r_{n+1}^n - r_1 r_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

und nach den Regeln zur Berechnung der Determinante gilt

$$\begin{aligned} \det(V(r_1, \dots, r_{n+1})) &= \det(W) \\ &= 1 \cdot \det(W_{1,1}) \\ &= \prod_{j=2}^{n+1} (r_j - r_1) \cdot \det(V(r_2, \dots, r_{n+1})) \\ &= \prod_{i < j} (r_j - r_i). \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile ausgenutzt haben, dass wir aus der  $j$ -ten Zeile von  $W_{1,1}$  den Faktor  $r_{j+1} - r_1$  nach vorne ziehen können und in der letzten Zeile die Induktionsvoraussetzung benutzt haben.

**13.18** Es ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**13.19** Es ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**13.20** Es ist  $\det A = 0$ , also ist  $A$  nicht invertierbar.

**13.21** Die Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn sie Rang  $n$  hat, also wenn ihre Zeilen linear unabhängig sind. Wegen  $\text{Rang}(A^T) = \text{Rang}(A)$  ist das aber äquivalent dazu, dass die Zeilen von  $A^T$ , also die Spalten von  $A$ , linear unabhängig sind.

**13.22** Die Matrizen  $A$  und  $B$  sind orthogonal, die Matrix  $C$  nicht.

**13.23** Die Abbildung wird beschrieben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

**13.24** Wegen  $1 = \det(E_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T)$  und  $\det(A^T) = \det(A)$  muss für eine orthogonale Matrix  $(\det A)^2 = 1$  gelten, also  $\det A = \pm 1$ .

**13.25** Es ist  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ . Sind also  $A$  und  $B$  orthogonal, so gilt

$$A \cdot B \cdot (A \cdot B)^T = A \cdot B \cdot B^T \cdot A^T = A \cdot E_n \cdot A^T = E_n.$$

und das bedeutet gerade, dass  $A \cdot B$  orthogonal ist.

**13.26** Wegen  $U \cdot \bar{U}^T = E_n$  und  $\det \bar{U}^T = \overline{\det U}$  muss gelten  $|\det U|^2 = 1$ , also  $|\det U| = 1$ .

Die Matrix  $U = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist unitär mit Determinante  $i$ .

## Kapitel 14

**14.1** Die Matrix  $A$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = 8$  mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen). Die Matrix  $B$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 2$  mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen).

**14.2** Die Matrix  $A$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 3 + \sqrt{3}$  und  $\lambda_2 = 3 - \sqrt{3}$  mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen). Die Matrix  $B$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{41}}{2}$  und  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{41}}{2}$  mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 + \sqrt{41} \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 - \sqrt{41} \\ 4 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen).

**14.3** Die Matrix  $A$  hat Eigenwerte  $\lambda_1 = -1$  mit Eigenvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{und nicht-triviale Vielfache}), \quad \lambda_2 = 1 \text{ mit Eigenvektor}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{und nicht-triviale Vielfache}) \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 4$$

$$\text{mit Eigenvektor } v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (\text{und nicht-triviale Vielfache}).$$

**14.4** Die Matrix  $A$  hat Eigenwerte  $\lambda_1 = -1$  mit Eigenvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{und nicht-triviale Vielfache}), \quad \lambda_2 = 1 \text{ mit Eigenvektor}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{und nicht-triviale Vielfache}) \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 2 \text{ mit}$$

$$\text{Eigenvektor } v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{und nicht-triviale Vielfache}).$$

**14.5** Die Matrix  $A$  hat das charakteristische Polynom  $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2 \cos(\alpha) \cdot \lambda + 1$ . Seine Nullstellen sind genau dann reell, wenn  $\cos(\alpha) \pm 1$ , also wenn  $\alpha = k \cdot \pi$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .

**14.6** Die Matrix  $A$  hat das charakteristische Polynom  $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$ . Seine Nullstellen sind immer reell, und daher hat  $A$  für jedes  $\alpha$  reelle Eigenwerte.

**14.7** Die Matrix  $A$  hat die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 = 2 - 3i$  und  $\lambda_2 = 2 + 3i$  mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen). Die Matrix  $B$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 4 + i$  und  $\lambda_2 = 4 - i$  mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 - i \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 5 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen).

**14.8** Die Matrix  $A$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 3$  mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen). Die Matrix  $B$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = -i$  und  $\lambda_2 = 3i$  mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

(jeweils mit Vielfachen).

**14.9** Die Matrix  $A$  hat für  $b \neq 0$  die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 = a - b \cdot i$  und  $\lambda_2 = a + b \cdot i$  mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für  $b = 0$  ist  $a$  der einzige Eigenwert und jeder Vektor  $v \neq 0$  ist ein Eigenvektor.

**14.10** Wir betrachten den Fall  $n = 2$  und haben zu zeigen: Ist  $r \cdot v_1 + s \cdot v_2 = 0$ , so gilt schon  $r = s = 0$ . Dazu gilt

$$0 = A \cdot 0 = A \cdot (r \cdot v_1 + s \cdot v_2) = r \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + s \cdot \lambda_2 \cdot v_2$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= r \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + s \cdot \lambda_2 \cdot v_2 - \lambda_2 \cdot (r \cdot v_1 + s \cdot v_2) \\ &= r \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot v_1 \end{aligned}$$

Da  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , muss notwendig  $r = 0$  gelten, und damit auch  $s = 0$ .

Der allgemeine Fall folgt hieraus durch vollständige Induktion.

**14.11** Die Matrix  $A_1$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ , die Matrix  $A_2$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Transformationsmatrizen sind

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**14.12** Die Matrix  $A_1$  hat den doppelten Eigenwert  $\lambda_1 = 2$  und ist nicht diagonalisierbar, die Matrix  $A_2$  ist diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\lambda_1 = 4 - \sqrt{2}$  und  $\lambda_2 = 4 + \sqrt{2}$ . Eine Transformationsmatrix für  $A_2$  ist

$$S_2 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**14.13** Die Matrix  $A_1$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = 3 - 2 \cdot i$ ,  $\lambda_2 = 3 + 2 \cdot i$ , die Matrix  $A_2$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = -2 - 3 \cdot i$ ,  $\lambda_2 = -2 + 3 \cdot i$ . Transformationsmatrizen sind

$$S_1 = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1 - 3 \cdot i & -1 + 3 \cdot i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

**14.14** Die Matrix  $A_1$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{41}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{41}}{2}$ , die Matrix  $A_2$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Transformationsmatrizen sind

$$S_1 = \begin{pmatrix} 5 - \sqrt{41} & 5 + \sqrt{41} \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**14.15** Die Matrix  $A_1$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = -2 - 3 \cdot i$ ,  $\lambda_2 = -2 + 3 \cdot i$ , die Matrix  $A_2$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2} \cdot i$ ,  $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} \cdot i$ . Transformationsmatrizen sind

$$S_1 = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} i & -i \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

**14.16** Die Matrix  $A$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = -1$  (doppelt) und  $\lambda_2 = 1$ . Eine Transformationsmatrix für  $A$  ist

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

**14.17** Die Matrix  $A_1$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -2$  und  $\lambda_3 = -3$ , die Matrix  $A_2$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 2$  (doppelt). Transformationsmatrizen sind

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**14.18** Die Matrix  $A_1$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$  (doppelt) und  $\lambda_2 = 2$ . Eigenvektoren zu  $\lambda_1$  sind die nicht-trivialen Vielfachen von  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , Eigenvektoren zu  $\lambda_2$  sind die nichttrivialen

Vielfachen von  $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Die Matrix  $A_1$  ist nicht diagonalisierbar. Die Matrix  $A_2$  ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$  und  $\lambda_3 = 2$ . Transformationsmatrix für  $A_2$  ist

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren von  $A_2$  sind die nichttrivialen Vielfachen der Spalten von  $S_2$ .

**14.19** Die Matrix  $A_1$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 5$ , die Matrix  $A_2$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = -15$  (doppelt) und  $\lambda_2 = 15$ . Die Matrizen  $A_1$  bzw.  $A_2$  werden diagonalisiert durch

die orthogonalen Matrizen

$$S_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{5}{\sqrt{195}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} & -\frac{1}{\sqrt{195}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{13}{\sqrt{195}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

**14.20** In beiden Fällen funktioniert die orthogonale Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie dabei, dass  $A$  die Eigenwerte  $a + 1$  und  $a - 1$  hat und  $B$  die Eigenwerte  $a + 1$  und  $1 - a$ .

**14.21** Eine Matrix, die  $A_{a,b}$  auf Diagonalgestalt bringt, ist

$$S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**14.22** Die Matrix  $A$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 2$  (doppelt) und wird durch

$$S = \begin{pmatrix} -68 & -126 & 69 \\ 51 & 90 & -51 \\ -17 & -24 & 17 \end{pmatrix}$$

trigonalisiert.  $S$  bringt  $A$  sogar in die jordanische Normalform. Beachten Sie dabei, dass  $A$  nicht diagonalisierbar ist.

**14.23** Die Matrix  $A$  hat den Eigenwert  $\lambda_1 = 2$  (dreifach) und wird durch

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

trigonalisiert.  $S$  bringt  $A$  sogar in die jordanische Normalform (mit einem Jordan-Kästchen). Beachten Sie dabei, dass  $A$  nicht diagonalisierbar ist.

**14.24** Die Matrix  $A$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -1$  (doppelt) und wird durch

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in die jordanische Normalform gebracht. Beachten Sie dabei, dass  $A$  nicht diagonalisierbar ist.

**14.25** Für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$e^{A+B} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{e} + e & -\frac{1}{e} + e \\ -\frac{1}{e} + e & \frac{1}{e} + e \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e^A \cdot e^B$$

Der Grund hierfür ist, dass  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

**14.26** Eine QR-Zerlegung von  $A$  ist gegeben durch

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 2 \cdot \sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

**14.27** Eine QR-Zerlegung von  $A$  ist gegeben durch

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**14.28** Eine Singulärwertzerlegung von  $A$  ist gegeben durch

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}.$$

**14.29** Eine Singulärwertzerlegung von  $A$  ist gegeben durch

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{21}} & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Die Pseudoinverse  $A^+$  von  $A$  ist

$$A^+ = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

## Kapitel 15

### 15.1

1. Mitarbeiterzahl: Z. B. 5, 17 Familienstand des Chefs: ledig, verheiratet Hergestellte Produkte: z. B. Tische, Schrauben, Hosen Qualität der Produkte: z. B. niedrig, mittel, hoch Umsatz eines Jahres: 1 Mio. Euro, 100 000 Euro Rechtsform: GmbH, AG, GbR Betriebsklima: z. B. gut, mittel, schlecht

Kundenzufriedenheit: z. B. hoch, mittel, niedrig Sitz der Zentrale: z. B. Bottrop-Kirchhellen, Aachen, Saarbrücken, New York Wert der Immobilien: 1 Mio. Euro, 100 000 Euro Gründungsjahr: 1950, 1972, 2010

2. Mitarbeiterzahl: quantitativ diskret Familienstand des Chefs: qualitativ nominal Hergestellte Produkte: qualitativ ordinal Qualität der Produkte: qualitativ ordinal Umsatz eines Jahres: quantitativ diskret Rechtsform: qualitativ nominal Betriebsklima: qualitativ ordinal Kundenzufriedenheit: qualitativ ordinal Sitz der Zentrale: qualitativ nominal Wert der Immobilien: quantitativ diskret Gründungsjahr: qualitativ nominal

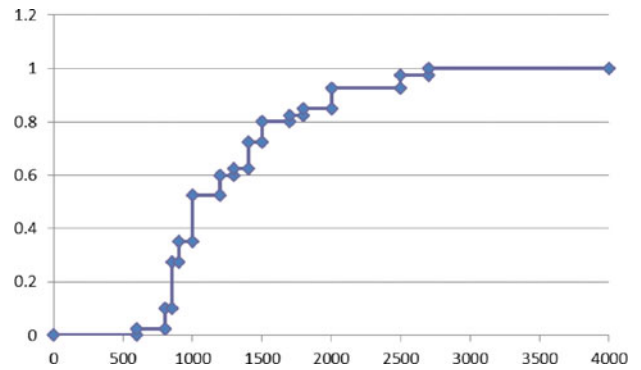
15.2

1.

$MMA_i$	$n_i$	$h_i$
600	1	0.025
800	3	0.075
850	7	0.175
900	3	0.075
1000	7	0.175
1200	3	0.075
1300	1	0.025
1400	4	0.1
1500	3	0.075
1700	1	0.025
1800	1	0.025
2000	3	0.075
2500	2	0.05
2700	1	0.025

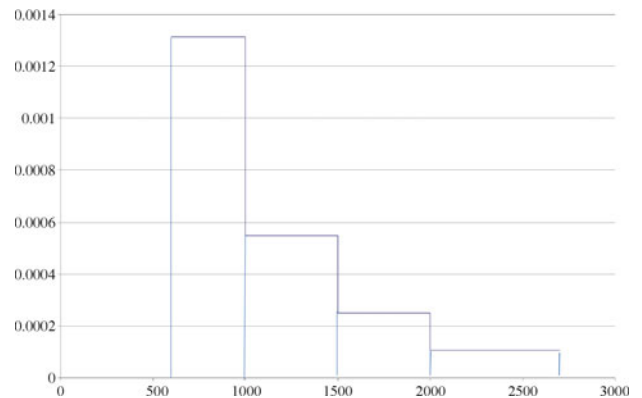
2.

$$F_{40}(x) = \begin{cases} 0, & x < 600 \\ 0.025, & 600 \leq x < 800 \\ 0.1, & 800 \leq x < 850 \\ 0.275, & 850 \leq x < 900 \\ 0.35, & 900 \leq x < 1000 \\ 0.525, & 1000 \leq x < 1200 \\ 0.6, & 1200 \leq x < 1300 \\ 0.625, & 1300 \leq x < 1400 \\ 0.725, & 1400 \leq x < 1500 \\ 0.8, & 1500 \leq x < 1700 \\ 0.825, & 1700 \leq x < 1800 \\ 0.85, & 1800 \leq x < 2000 \\ 0.925, & 2000 \leq x < 2500 \\ 0.975, & 2500 \leq x < 2700 \\ 1, & 2700 \leq x \end{cases}$$



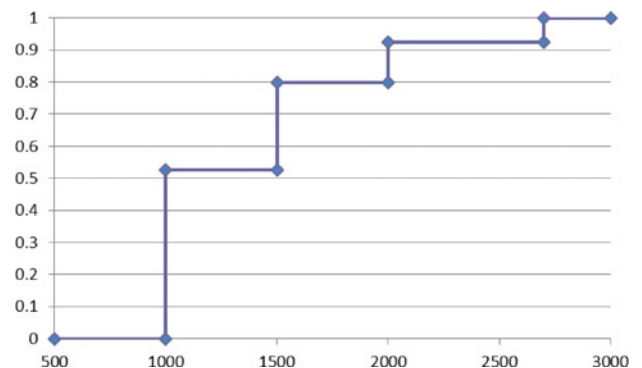
3. (a) 0.35  
 (b) 0.2  
 (c) 0.45  
 4.  $x_{\text{med}} = 1000, x_{\text{mod}} = \{850; 1000\}, \bar{x} = 1271.25$   
 5.

$A_i$	$h_i$	$d_i$	$k_i$
[600; 1000]	0.525	400	0.0013125
(1000; 1500]	0.275	500	0.00055
(1500; 2000]	0.125	500	0.00025
(2000; 2700]	0.075	700	0.0001071428571

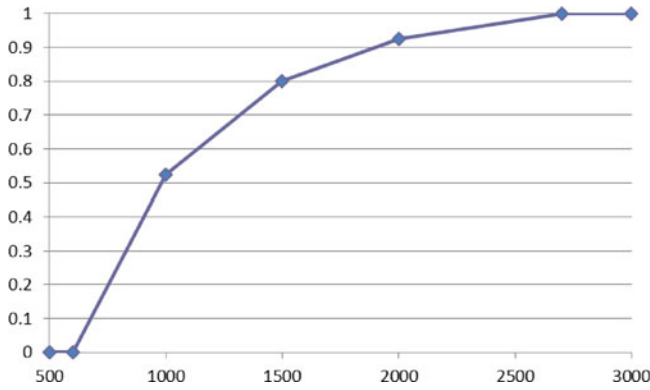


6.

$$\hat{F}_{40}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1000 \\ 0.525, & 1000 \leq x < 1500 \\ 0.8, & 1500 \leq x < 2000 \\ 0.925, & 2000 \leq x < 2700 \\ 1, & 2700 \leq x \end{cases}$$



$$F_{40}^*(x) = \begin{cases} 0, & x < 600 \\ 0.0013125(x - 600), & 600 \leq x < 1000 \\ 0.525 + 0.00055(x - 1000), & 1000 \leq x < 1500 \\ 0.8 + 0.00025(x - 1500), & 1500 \leq x < 2000 \\ 0.925 + 0.0001071(x - 2000), & 2000 \leq x < 2700 \\ 1, & 2700 \leq x \end{cases}$$



15.3

$\bar{x} = 21.04461538, s = 6.2332281, \hat{Q}_{0.25} = x_{(4)} = 17.34, \hat{Q}_{0.75} = x_{(10)} = 24.39, V = 0.296191115.$

Kapitel 16

16.1

1.

	b	g	s	$n_{i\bullet}$
A	6	3	1	10
B	0	3	3	6
C	5	3	1	9
$n_{\bullet j}$	11	9	5	25

2.

	b	g	s	Summe
A	0.6	0.3	0.1	1
B	0	0.5	0.5	1
C	0.55	0.33	0.11	1

	b	g	s
A	$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{3}$	0.2
B	0	$\frac{1}{3}$	0.6
C	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{3}$	0.2
Summe	1	1	1

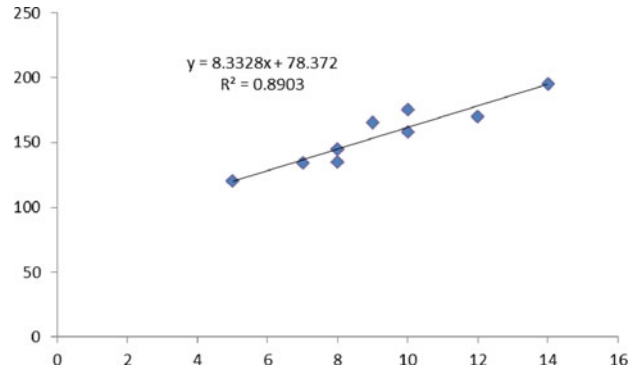
3.  $\chi^2 = 7.49, K = 0.48026, K_* = 0.588195979.$   
 4. Da  $K_* \neq 0$ , sind die Merkmale nicht unabhängig.

16.2

$r_{Sp} = -0.595238095$

16.3

1.



2.  $y = 7.837181664 + 8.332767402x$   
 3.  $r_{xy} = 0.943561732, B = 0.890308742$   
 4. 170.03 Mio. Euro. Bei sehr viel größeren Eingabewerten ist die Verlässlichkeit des Modells nicht gewährleistet!

Kapitel 17

17.1

- a)  $\Omega = \{\{0, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 1\}\}$   
 b)  $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$   
 c)  $\Omega = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$   
 d)  $\Omega = \{\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 1, 1\}\}$   
 e)  $\Omega = \{(i, j, k) | i, j, k \in \{r, g_1, g_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}\}, i \neq j \neq k\}$

17.2

- a) 0  
 b)  $\frac{10}{216}$   
 c)  $\frac{6}{36}$   
 d)  $\frac{5}{16}$

17.3

- a) 0.15  
 b) 0.2  
 c) 0.8  
 d) 0.95

17.4

0.808510638

17.5

1.

$$\frac{0.98 \cdot p}{0.93 \cdot p + 0.05}$$

- 2.
- |               |             |
|---------------|-------------|
| $p = 0.005 :$ | 0.089661482 |
| $p = 0.01 :$  | 0.165261382 |
| $p = 0.05 :$  | 0.50777202  |
| $p = 0.1 :$   | 0.685314685 |

**17.6**

- a)  $\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$  Stochastisch unabhängig  
 b)  $0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$  Nicht stochastisch unabhängig  
 c)  $\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$  Stochastisch unabhängig  
 d)  $\frac{1}{6} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$  Nicht stochastisch unabhängig  
 e)  $\frac{1}{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$  Stochastisch unabhängig

**17.7**

0.9145688

**17.8**

Alternative 1: 5 000 Euro, Alternative 2: 4 300 Euro.

**17.9**

- a) Zuerst muss Ihnen klar sein, dass beide Aufgabenteile a) und b) identisch sind!  
 (i) 0.528215883  
 (ii) 0.52822

**17.10**

- a) 0.25412184  
 b) 0.80589565  
 c) 0.44822619

**17.11**

- a)  $\frac{3}{124}$   
 b)

$$G(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{x^3}{124} - \frac{1}{124}, & 1 \leq x \leq 5 \\ 1 & , x > 5 \end{cases}$$

**17.12**

- a)  $E[X] = 1$   
 b)  $E[X^2] = 1.2, \text{Var}(X) = 0.2$

**17.13**

- a)  $\frac{5}{6}$   
 b)  $\frac{1}{4}$   
 c)  $\frac{5.8}{12} = \frac{29}{60}$   
 d)  $\frac{8}{9}$

**17.14**

- a) 0.049663658  
 b) 0.000553084  
 c) 0.000553084

**17.15**

- a) (a) 0.841345  
 (b) 0.864334  
 (c) 0.174128  
 b) 221.29

**17.16**

- a)  $E[X] = 1.1x, \text{Var}(X) = 0.25x^2$   
 b)  $E[Y] = 1.1x, \text{Var}(Y) = 0.05x^2$   
 c) Man sieht, dass die zweite Investitionsmethode im Durchschnitt einen identischen Gewinn erbringt, aber bei deutlich geringerem Risiko im Vergleich zur ersten Investitionsmethode (gemessen an der Varianz).  
 d) (a) 0.826446281  
 (b) 0.165289256

**17.17**

- a) 0.980301 bzw. 0.765861  
 b) 0

**Kapitel 18****18.1**

- a) Erwartungstreu sind  $A, C$  und  $E$ .  
 b)  $\text{Var}(A) = \frac{37}{25}\sigma^2, \text{Var}(C) = \frac{1}{2}\sigma^2, \text{Var}(E) = \frac{1}{5}\sigma^2$ . Also besitzt  $E$  die kleinste Varianz.

**18.2**

- a) Poisson-Verteilung  
 b)

$$l'(\lambda) = \frac{\sum_{k=1}^2 4x_k}{\lambda} - 24 = 0 \Rightarrow \lambda = 2.5$$

- c)

$k$	0	1	2	3	4	5	6	$\geq 7$
$h(k)$	0.083	0.208	0.25	0.208	0.125	0.083	0.042	0

- 1.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	$\geq 7$
$P(X = k)$	0.082	0.205	0.257	0.214	0.134	0.067	0.028	0.014

2. Die Schätzung ist offensichtlich sehr gut.

**18.3**

[4.266654762; 4.733345238]

**18.4**

- a) [50.36825508; 57.63174492]  
 b) [3.4925; 9.2696]

**18.5**

[4.301463409; 4.698536591]



**18.6**

- a)  $H_0 : \mu \geq 750 \quad A : \mu < 750$   
 Lehne  $H_0$  ab, falls  $\bar{x} < 750 - x_{0.95} \cdot \frac{4}{5}$
- b) Da  $748.84 > 748.68$ , kann  $H_0$  zum Niveau 5 % nicht abgelehnt werden. Der Abnehmer kann also keinen Preisnachlass fordern.
- c)  $\beta = 0.19489447$
- d)  $n \geq 34.269316$ , also müssen mindestens 35 Dosen geprüft werden.
- e)  $H_0 : \mu \leq 750 \quad A : \mu > 750$   
 Lehne  $H_0$  ab, falls  $\bar{x} > 750 + x_{0.95} \cdot \frac{4}{5} = 751.32$

**18.7**

Da  $11.5 > 10.47396789$ , kann  $H_0$  zum Niveaus 1 % nicht abgelehnt werden. Das Unternehmen muss die Hypothese also revidieren.

**18.8**

- a)  $H_0 : \sigma^2 = 0.36 \leq 750 \quad A : \sigma^2 \neq 0.36$   
 Da  $10.4 > 0.48$  und  $10.4 < 11.14$ , kann  $H_0$  zum Niveau 5 % nicht abgelehnt werden.
- b)  $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \quad A : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$   
 Da  $\frac{0.94}{0.908} = 1.035 < 11.4$ , kann  $H_0$  zum Niveau 1 % nicht abgelehnt werden. Die Behauptung, dass Aktie A riskanter ist, wird nicht gestützt.

**18.9**

$H_0 : p_1 = 0.3, p_2 = 0.35, p_3 = 0.15, p_4 = 0.1, p_5 = 0.1$  gegen  $A : \text{mindestens ein } p_i \neq \bar{p}_i$   
 Da  $V = 4.8643 > \chi_4^2(0.99) = 13.28$ , kann  $H_0$  zum Niveau 0.01 abgelehnt werden. Die Verteilung sollte also revidiert werden.

**18.10**

$H_0 : \text{Es liegt eine exp}(0.25)\text{-Verteilung vor. gegen } A : \text{Es liegt keine exp}(0.25)\text{-Verteilung vor.}$

$A_j$	$p_j$	$n \cdot p_j$	$h_j$
[0; 1]	0.221199216	6.63597648	0
(1; 3]	0.30643423	9.190269	9
(3; 5]	0.185861755	5.57585265	13
(5; $\infty$ )	0.286504796	8.59514388	8

Da  $n \cdot p_j \geq 5$  für alle Klassen gilt, müssen keine Klassen zusammengefasst werden.

Da  $V = 16.566243 > \chi_3^2(0.95) = 7.81$ , kann  $H_0$  zum Niveau 5 % abgelehnt werden. Die Lebensdauern scheinen nicht  $\text{exp}(0.25)$ -verteilt zu sein.

**18.11**

Hier ist  $\lambda$  unbekannt, es muss also zuerst geschätzt werden. Da der Erwartungswert der Exponentialverteilung gerade  $\frac{1}{\lambda}$  ist, können wir also den erwartungstreuen Schätzer  $\bar{x}$  für den Erwartungswert benutzen. Also gilt:  $\frac{1}{\lambda} = 54$ , also ist  $\hat{\lambda} = \frac{1}{54}$ . Es muss also direkt berücksichtigt werden, dass beim Ablesen des  $\chi^2$ -Werts noch ein Freiheitsgrad für den geschätzten Parameter abgezogen wird.

$A_j$	$p_j$	$n \cdot p_j$	$h_j$
[0; 15]	0.2425	12.125	2
(15; 30]	0.1837	9.185	7
(30; 45]	0.1392	6.96	7
(45; 60]	0.1054	5.27	10
(60; 90]	0.1403	7.015	12
(90; 120]	0.0805	4.025	6
(120; 180]	0.0727	3.635	4
(180; $\infty$ )	0.0357	1.785	2

Da die letzten drei Klassen die Bedingung  $n \cdot p_j \geq 5$  verletzen, werden sie zu einer Klasse zusammengefasst:

$A_j$	$p_j$	$n \cdot p_j$	$h_j$
[0; 15]	0.2425	12.125	2
(15; 30]	0.1837	9.185	7
(30; 45]	0.1392	6.96	7
(45; 60]	0.1054	5.27	10
(60; 90]	0.1403	7.015	12
(90; $\infty$ )	0.1889	9.445	12

Da  $V = 17.45 > \chi_{6-1-1}^2(0.95) = \chi_4^2(0.95) = 9.49$ , kann  $H_0$  zum Niveaus 5 % abgelehnt werden. Die Abfertigungszeiten scheinen also nicht exponentialverteilt zu sein.

# Abbildungsnachweis

Weitere Hinweise zu Bildrechten finden Sie in den jeweiligen Abbildungsunterschriften. Alle Abbildungen, die keinen Nachweis haben, wurden von den Autoren erstellt.

## Teil I

**Eröffnungsbild:** © ?iga ?etri?/Getty Images/iStock

### Kapitel 1

**Eröffnungsbild:** © anopdesignstock/Getty Images/iStock

### Kapitel 2

**Eröffnungsbild:** © Dmitry Margolin/Hemera/Getty Images/Thinkstock

### Kapitel 3

**Eröffnungsbild:** © agsandrew/Getty Images/iStock

## Teil II

**Eröffnungsbild:** © da-kuk/Getty Images/iStock

### Kapitel 4

**Eröffnungsbild:** © stockcam/Getty Images/iStock

### Kapitel 5

**Eröffnungsbild:** © Bobbushphoto/Getty Images/istock

### Kapitel 6

**Eröffnungsbild:** © Claudiad/Getty Images/iStock

### Kapitel 7

**Eröffnungsbild:** © Russell102/Getty Images/iStock

### Kapitel 8

**Eröffnungsbild:** © Instants/Getty Images/iStock

## Teil III

**Eröffnungsbild:** © mirpic/Fotolia

### Kapitel 9

**Eröffnungsbild:** © Wolfgang Gurlit/Fotolia

### Kapitel 10

**Eröffnungsbild:** © LightingKreative/Fotolia

### Kapitel 11

**Eröffnungsbild:** © Gudellaphoto/Fotolia

### Kapitel 12

**Eröffnungsbild:** © Spectral-Design/Fotolia

### Kapitel 13

**Eröffnungsbild:** © industrieblick/ Fotolia

**13.14:** © Patrick P. Palej/Fotolia

### Kapitel 14

**Eröffnungsbild:** © costadelsol/Fotolia

## Teil IV

**Eröffnungsbild:** © gow27/Fotolia

### Kapitel 15

**Eröffnungsbild:** © adam121/Fotolia

### Kapitel 16

**Eröffnungsbild:** © Marek/Fotolia

### Kapitel 17

**Eröffnungsbild :** © Marek/Fotolia

### Kapitel 18

**Eröffnungsbild:** © Thomas Söllner/Fotolia

## Anhang: Tabellen

**Eröffnungsbild:** © v.poth/Fotolia